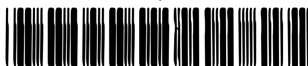
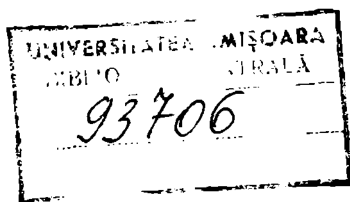
GH. ENESCU

INTRODUCERE ÎN LOGICA MATEMATICĂ





EDITURA ŞTIINŢIFICĂ
Bucureşti—1965

PREFAȚĂ

Scopul acestei lucrări este de a-l introduce pe cititor în studiul fundamentelor logicii matematice.

Considerăm că necesitatea unei asemenea cărți este indiscutabilă în momentul de față.

Dintre lucrările străine, în mod special, am utilizat: Bazele logicii teoretice *de D. Hilbert și W Ackermann,* Introducere în metamatematică *de S. C. Kleene,* Introducere în logica matematică *de A. Church,* Elemente de logică matematică *de P. S. Novikov,* Logica matematică *de R. L. Goodstein,* Introducere în logica contemporană *de R. Blanché și* Logica formală *de I. M. Bochenski.*

Lucrarea a fost întocmită astfel încît să nu ceară din partea cititorului decît o pregătire medie și, evident, răbdare în studiu și o anumită capacitate de a opera cu noțiuni foarte abstracte. Pentru cititorul fără o pregătire logică specială am anexat o expunere a logicii generale.

În vederea studiului dăm următoarele indicații generale: Dacă cititorul nu cunoaște logica generală sau nu are cunoștințe recente de logică generală, îi propunem să înceapă studiul cu „anexa"

Trebuie să se aibă în vedere că esențialul în multe cazuri îl formează definițiile și regulile. *Rezolvarea anumitor probleme se face pe baza definițiilor și regulilor.* Adesea a rezolva o problemă *înseamnă aci* a construi o formulă cu anumite proprietăți pornind de la alte formule. *Problema se consideră rezolvată atunci cînd am îndeplinit condițiile prescrise de definiție și am epuizat aplicarea sistemului de reguli necesare rezolvării.*

Exercițiile trebuie rezolvate pas cu pas *avînd în vedere că fiecare pas făcut înseamnă* aplicarea unei reguli, *iar* fiecare rezultat obținut *înseamnă* îndeplinirea unei condiții prescrise de definiții.

Orice observație făcută în legătură cu această lucrare o vom examina cu atenție pentru o eventuală ediție îmbunătățită.

AUTORUL

§ 1. CE ESTE LOGICA?

Pentru început vom considera expresiile:

(1) „Vertebrat"

(2) „Omul care merge pe stradă"

(3) „Bucureştiul este capitala Romîniei"

(4) „Бухарест — столица Румынии"

Expresia (1) e înţeleasă aproape de toţi cei ce ştiu limba romînă, expresiile (2) şi (3) de toţi cei ce ştiu limba romînă, iar expresia (4) de cei ce ştiu limba rusă.

Faptul că cineva „înţelege o expresie" înseamnă că ştie s-o folosească în legătură cu obiectul sau situaţia la care ea se referă şi, în al doilea rînd, că el poate să construiască şi alte expresii în legătură cu obiectul ei.

Există însă o anumită deosebire între expresiile (1), (2) şi (3).

Expresiile (1) şi (2) ne dau impresia unor frînturi de gînduri şi nu a unor gînduri întregi, deoarece ne reamintesc de anumite obiecte fără a spune nimic despre ele. Cu alte cuvinte aceste expresii nu vor să spună nimic (nu au o intenţie), nu comunică o informaţie, nu cuprind o judecată despre obiectul respectiv.

Dimpotrivă, expresia (3) nu numai că reaminteşte de ceva — oraşul Bucureşti — dar ne şi comunică ceva despre Bucureşti, anume faptul că este capitala Romîniei. Aşadar, expresia (3) are o intenţie, o informaţie, cuprinde o judecată. Expresia (4) spune acelaşi lucru ca şi expresia (3), de aceea putem scrie:

$$(3) \equiv (4),$$

ceea ce înseamnă că ele sînt *sinonime*.

Am analizat expresiile de mai sus din punctul de vedere al informaţiei sau intenţiei lor.

Expresiile care comunică o informaţie vor fi numite „enunţuri" sau „propoziţii". Dar propoziţiile pot fi analizate şi din alte puncte de vedere decît *intenţia* lor.

Iată cele mai importante puncte de vedere din care pot fi analizate propozițiile:

1) forma gramaticală,

2) informația (sau, cu alte cuvinte, intenția, gîndul, judecata, sensul propoziției),

3) valoarea logică (adevăr, fals sau altceva),

4) structura logică (ex. subiect-predicat, obiecte-relații, element-clasă),

5) „valoarea de întrebuințare" a propoziției (ex. propozițiile pot fi folosite pentru a identifica obiectele, pentru a le ordona, pentru a le transforma, pentru a construi o teorie, pentru a produce o emoție artistică ș.a.).

Deoarece nu tot ce se numește de obicei „propoziție" corespunde cu conceptul de propoziție care va fi studiat de noi, precizăm că vom avea în vedere numai acele propoziții care sînt caracterizate prin toate determinările 1)— 5). Cu alte cuvinte, vom avea în vedere numai așa-numitele „propoziții declarative", dar nu și pe cele interogative sau imperative.

Ceea ce numim „formă gramaticală" a unei propoziții este *forma* și *ordinea* cuvintelor cu ajutorul cărora se construiește propoziția.

Conceptul de informație îl considerăm înțeles, sau mai precis, ne mulțumim cu puținele indicații date la început. Altfel spus îl luăm ca *prim, nedefinit*.

Despre informația unei propoziții spunem în mod obișnuit că este adevărată dacă corespunde stării de lucruri la care se referă propoziția („corespunde realității"), sau că este falsă dacă nu corespunde stării de lucruri la care se referă propoziția. De ex., propoziția „fierul este bun conducător de căldură" este o propoziție adevărată, iar „2 + + 2 = 3" este o propoziție falsă.

Termenii de „adevăr" și „fals" au sens numai atunci cînd propoziția este raportată la un domeniu de obiecte distinct de ea. De ex., în afara propoziției „fierul este bun conducător de căldură" există metalul pe care noi îl numim „fier" cu proprietatea pe care o numim „bun conducător de căldură", iar în afara propoziției „2 + 2 = 3" există mulțimile de cîte două obiecte care prin adunare (punere la un loc) nu dau o mulțime de trei, ci o mulțime de patru obiecte.

Dar raportul dintre propoziție și realitate poate să nu fie totdeauna atît de clar. În acest caz vom folosi anumite

„înmlădieri" ale acestor concepte extreme. Vom putea introduce astfel un şir întreg de concepte „înmlădiate", ca: „aproximativ adevărat", „adevărat de regulă", „probabil adevărat", „probabil fals" ş.a.m.d.

Există unele propoziţii pentru care problema adevărului n-are de loc sens, deşi aparent sînt propoziţii obişnuite.

Cînd actorul spune: „Sînt eu, Hamlet, prinţul Danemarcii!", nu ne interesează de loc dacă a existat sau nu un Hamlet şi ne este clar că actorul n-a spus despre sine acest lucru.

În ce priveşte conceptul de structură logică a propoziţiei (sau structura logică a judecăţii cuprinse în propoziţie), prin aceasta se are în vedere felul raportului real la care se referă propoziţia. Cunoaştem trei tipuri de raporturi: raportul obiect-proprietăţi, raportul dintre obiecte şi raportul dintre mulţime şi element sau mulţime şi submulţime. Corespunzător acestor trei tipuri de raporturi distingem: judecăţi de predicaţie, judecăţi de relaţie, judecăţi extensive. De ex., propoziţia „trandafirul este o plantă" este o propoziţie predicativă, propoziţia „4 > 2" este o propoziţie de relaţie, iar propoziţia „mulţimea oamenilor este cuprinsă în mulţimea mamiferelor" este o propoziţie extensivă.

Acum putem să definim conceptul nostru fundamental „propoziţia".

Df*. 1. Numim „propoziţie" acea expresie a limbii care satisface determinările 1) — 5).

Pe această bază vom încerca să definim apoi conceptul de logică. La prima vedere pare firesc să dăm următoarea definiţie: *Logica este ştiinţa despre propoziţii*. Această definiţie este însă prea largă, deoarece şi alte ştiinţe pot studia propoziţiile. Definiţia exactă are următoarea formă:

Df. 2. Logica este ştiinţa care studiază raporturile generale propoziţionale cu scopul de a descoperi procedee de rezolvare pentru următoarele tipuri de probleme:

a) a determina pe baza unor propoziţii date valoarea altor propoziţii,

b) a găsi unele propoziţii noi pornind de la altele,

c) a găsi propoziţiile din care decurg anumite propoziţii date.

* Df. — prescurtare pentru cuvîntul „definiţie".

Ni se pare că tocmai această finalitate a logicii o caracterizează ca ştiinţă şi că orice alte definiţii în afara acestei finalităţi sînt sortite eşecului*.

§ 2. TREPTELE LOGICII

Posibilitatea de a construi diferite „logici" în înţelesul care a început să fie dat de la o vreme acestui termen este determinată de posibilitatea de a considera propoziţia sub un aspect sau altul.

Putem construi logica „pur formal", adică numai ca un sistem de semne mînuite după reguli date. Aceasta este „logica formalizată" sau „logistica".

Totuşi, aşa cum ne vom convinge, nu vom putea construi logica formalizată (sau formalismele logice) dacă nu luăm în consideraţie propoziţia aşa cum a fost definită de noi mai sus, cu anumite determinări de conţinut. În fond e vorba de a abstractiza anumite *structuri intra- şi inter-propoziţionale* pornind de la un anumit obiect care este propoziţia.

Trebuie să desprindem aceste „efigii" ale propoziţiilor de pe un material concret — mulţimea propoziţiilor determinate cu care operează gîndirea.

Pe măsură ce înaintăm în abstractizare, obiectul nostru — propoziţia — va apărea din ce în ce mai sărăcit.

Astfel, la un moment dat vom face abstracţie de faptul că propoziţiile:

a) au o intenţie,

b) au o structură logică internă,

c) au o formă gramaticală proprie,

d) au o valoare de întrebuinţare.

În faţa noastră se va înfăţişa un obiect „abstract" cu o singură determinare, şi anume faptul că poate fi adevărat sau fals.

---

* Această finalitate a logicii vizează cu un cuvînt *procedeele de raţionare*. Procedeele de raţionare sînt construite în funcţie de anumite raporturi generale. Deoarece aceleaşi raporturi pot fi studiate uneori şi de alte ştiinţe (de exemplu, matematica şi logica studiază împreună raportul de incluziune) noi vom spune că *logica studiază orice tip de raport capabil să genereze o schemă originală şi generală de raţionare* şi studiul raporturilor ne interesează numai întrucît vizăm asemenea scheme.

Structurile astfel desprinse le vom numi „structuri de adevăr" sau „structuri valorice"

Acestor structuri de adevăr le corespund anumite structuri de semne (desene). La un moment dat vom putea face abstracţie şi de structurile de adevăr, în aşa fel încît vom rămîne numai cu un sistem de desene ordonate după anumite reguli. Acesta şi este ceea ce numim „formalismul logic"

Vom proceda apoi invers: vom introduce din nou determinările de care am făcut abstracţie. Cu alte cuvinte, dacă la început am operat o diferenţiere asupra propoziţiilor, acum vom opera o integrare a diferitelor determinări.

Reintroducînd valoarea vom obţine o interpretare logică a formalismului. Această logică o vom numi „Logica propoziţiilor".

Apoi vom introduce în cercetare „structura internă" a propoziţiei. Cu alte cuvinte, dacă pentru a construi aşa-numita „logică a propoziţiilor" am luat propoziţia ca întreg, deci *sintetic*, acum o vom desface în părţile ei componente. Vom găsi astfel o structură „subiect-predicat" sau o structură adecvată „elementului-clasei", „clasei-clasei" sau „obiectelor-relaţiilor".

Vom obţine corespunzător:

1. o logică a predicatelor,
2. o logică a claselor,
3. o logică a relaţiilor.

Toate „logicile" enumerate mai sus, adică: logistica sau calculul logic (formalismele logice), logica propoziţiilor, logica predicatelor, logica claselor, logica relaţiilor, nu trebuie considerate decît ca anumite *trepte* ale unei logici unice pe care o vom numi „LOGICA" pur şi simplu.

Putem apoi construi diferite „subcapitole" ale logicii: logica polivalentă, logica modală, logica „matematică" a predicatelor şi logica aristotelică a predicatelor.

Există apoi o teorie generală a sistemelor care analizează: a) conceptele sistemelor, b) valoarea şi limitele sistemelor şi c) interpretarea lor („semantica logică"). Această teorie poartă numele de „Teoria sistemelor logice" sau, ceea ce este totuna, „Metalogica" În ceea ce priveşte aspectul denumit de noi „valoarea de întrebuinţare" a propoziţiilor, dacă vom considera logica sub acest aspect vom putea construi o nouă disciplină pe care am putea-o numi „metodologie" sau, şi mai general, „logică aplicată".

În fine, ca orice știință, „Logica" poate da naștere la un șir de probleme de o valoare mai generală, anume probleme filozofice. Disciplina care se ocupă de asemenea probleme o putem numi „Filozofia logicii"

§ 8. CONSIDERAȚII DE STRUCTURĂ

Logica în forma ei actuală s-a dezvoltat sub influența matematicii. Mulțimea de denumiri pe care le poartă — „matematică", „simbolică", „algoritmică", „teoretică", „modernă", „logistică" — arată ce anume trăsături consideră un autor sau altul că sînt esențiale acestei logici.

În cele ce urmează vom căuta să introducem pe cititor în „logica modernă", adică în logica la stadiul ei actual de dezvoltare. Fără a epuiza întreg tabloul logicii contemporane, ne vom strădui totuși să dăm cititorului atît cît este suficient și necesar pentru a putea apoi adînci de sine stătător un aspect sau altul.

În construcția lucrării ne-am călăuzit de două principii:

a. logica trebuie să apară ca o suită de probleme de rezolvat și de procedee corespunzătoare,

b. trecerea de la un capitol la altul va fi concepută ca un „proces de generalizare" pornind de la un sistem inițial. Dat fiind faptul că sînt posibile trei moduri de organizare: „prin definiții", „axiomatic" și „prin scheme" (natural), vom începe cu cel mai simplu — cu un sistem de definiții.

Capitolul I

LOGICA PROPOZIȚIILOR

§ 1. PROBLEME DE EXISTENȚĂ

Pornim de la ideea că este dat un șir de domenii de obiecte, de ex. obiecte materiale (prin „obiect" putem desemna și obiecte abstracte: concepte, judecăți etc.). În legătură cu aceste domenii formăm o mulțime de propoziții. Această *mulțime de propoziții* are două caracteristici:

a) este o mulțime infinită,

b) fiecărei propoziții îi corespunde o singură valoare logică.

În ce privește termenul „infinit", se impun unele explicații.

Că o mulțime este infinită înseamnă că „poate să crească oricît de mult". Acest infinit a fost numit „infinit potențial". El trebuie deosebit de „infinitul actual" care înseamnă „infinit de multe obiecte" și în același timp „absolut toate deodată".

Practic însă vom exclude total infinitul din considerațiile noastre și vom opera numai cu mulțimi finite, și anume cu un finit practic realizabil. Uneori vom folosi „...." (ex.: $p, q, r, \ldots$) și aceasta va însemna „nu se încheie aci, dar se încheie undeva".

Deoarece mulțimea valorilor poate crește la infinit, ne vom limita pentru început la o logică cu două valori. O logică cu un număr oarecare de valori o vom nota cu L_n. Logica cu două valori L_2 este logica adevăr-falsului sau „logica bivalentă" Ea este numai un fragment din ceea ce numim cu un termen general „logica propozițiilor". Evident, toată logica are ca obiect studiul propozițiilor; printre logicieni însă s-a încetățenit termenul de „logică a propozițiilor" într-un sens restrîns. Aceasta este acea parte a logicii care studiază propozițiile ca pe ceva elementar.

În cele ce urmează vom începe studiul logicii propozițiilor cu L_2.

§ 2. CUM APARE ACEASTĂ LOGICĂ?

Revenim la mulţimea propoziţiilor pe care o notăm cu M. Din mulţimea M separăm submulţimea M_1, adică mulţimea propoziţiilor, astfel că fiecare este caracterizată numai prin una din cele două valori — adevăr sau fals — dar niciodată de amîndouă.

Să alegem din această mulţime M_1 două propoziţii:

(1) se face cald.

(2) se urcă mercurul în termometru.

Aceste propoziţii vorbesc despre două evenimente materiale, două procese fizice. Noi am spus totuşi că vom analiza raporturi propoziţionale şi nu evenimente materiale.

Pentru a vorbi despre propoziţii trebuie să introducem un limbaj şi în primul rînd să dăm nume propoziţiilor care vor constitui „obiectul" nostru de studiu.

Pentru a *denumi* cele două propoziţii avem mai multe posibilităţi, dintre care două par a ne sta mai la îndemînă: folosim fie literele din alfabet (luate în ordine alfabetică), fie chiar numerele de ordine, în cazul de faţă (1) şi (2). Există apoi un procedeu asupra căruia a atras atenţia în mod deosebit logicianul polonez Tarski, procedeul numelor-ghilimele.

De pildă, propoziţia (1) va purta numele *a*, iar propoziţia (2) numele *b*.

Raportul dintre nume şi propoziţie va fi notat astfel:

a $\doteq$ „se face cald"

(unde $\doteq$ înseamnă „desemnează", iar semnele „ (ghilimelele) arată că vorbim despre propoziţie şi nu despre acelaşi lucru ca şi propoziţia).

Înţelesul literelor „*a*," „*b*" va fi deci: „propoziţia care vorbeşte despre faptul că se face cald" şi respectiv „propoziţia care vorbeşte despre faptul că se urcă mercurul în termometru"

Vom putea scrie mai departe:

(1)' *a* este adevărat,

(2)' *b* este adevărat.

Cum însă logica nu se ocupă de asemenea propoziţii cum sînt cele desemnate prin „*a*" şi „*b*", ci de mulţimea M_1, vom introduce asemenea *nume* pe care le vom numi cu Frege „nume-variabile" *(Namen-variable)* sau pur şi simplu „variabile". Variabilele se definesc pe întreg domeniul

lui M_1 și desemnează o propoziție oarecare din acest domeniu. Variabilele vor fi notate cu literele din partea a doua a alfabetului latin: $p, q, r, \ldots$

Raportul dintre variabilă și obiectul ei (în cazul de față propoziția) este supus următoarelor reguli:

R_1*. *Oricare din literele p, q, r, poate fi nume pentru oricare din propozițiile mulțimii M_1.*

R_2. *Nici una din literele p, q, r, nu poate desemna mai mult de o propoziție deodată.*

§ 3. LEGĂTURI LOGICE ÎNTRE PROPOZIȚII

Între propozițiile mulțimii M_1 unele sînt *elementare* (= nici o parte a lor nu mai constituie o propoziție), altele sînt *compuse* din acestea cu ajutorul anumitor cuvinte de legătură.

Există mai multe moduri de a forma propoziții compuse. Aceste moduri sînt determinate de varietatea raporturilor dintre obiecte și se exprimă în anumite cuvinte de legătură ca: „și", „sau", „dacă... atunci", „dacă și numai dacă", „este incompatibil cu"

Revenind la cele două propoziții de mai sus, putem forma următoarele propoziții compuse:

(3) se face cald și se urcă mercurul în termometru,

(4) se face cald sau se urcă mercurul în termometru,

(5) dacă se face cald atunci se urcă mercurul în termometru,

(6) dacă și numai dacă se face cald se urcă mercurul în termometru,

(7) se face cald este incompatibil cu se urcă mercurul în termometru.

În expresiile (3) — (7) cuvintele de legătură nu leagă chiar propoziții, ci exprimă legături între procesele fizice respective.

Pentru a arăta că avem de-a face cu legături între propoziții și nu pur și simplu cu o propoziție despre două procese legate într-un anumit fel, va trebui să scriem altfel, și anume:

(3)' „se face cald" și „se urcă mercurul în termometru"

(4)' „se face cald" sau „se urcă mercurul în termometru" ș.a.m.d., sau

---

* R — prescurtare pentru cuvîntul „regulă"

(3)" „se face cald şi se urcă mercurul în termometru" ş.a.m.d.

Considerăm propoziţia (3)" Ea poate fi descompusă în două propoziţii: „se face cald", „se urcă mercurul în termometru" În acest caz, particula rămasă „şi" evident că n-ar putea avea alt rost decît de cuvînt de legătură între propoziţii, căci părţile unei propoziţii de acest fel nu pot fi decît tot propoziţii. Dimpotrivă, suprimarea ghilimelelor, adică scrierea: *se face cald şi se urcă mercurul în termometru*, arată că expresia e folosită pentru a vorbi despre procesele fizice corespunzătoare. În acest caz, descompunerea expresiei va da două expresii care vorbesc despre procese diferite fără nici o referire la expresia ca atare.

Astfel: se face cald, se urcă mercurul în termometru sînt două procese care coexistă (ceea ce e arătat de „şi").

E posibil însă ca cele două procese să nu aibă loc.

Dacă procesele considerate nu au loc, atunci propoziţiile care constată acest lucru vor avea forma:

(8) nu se face cald,

(9) nu se urcă mercurul în termometru.

Ne limităm la tipurile de propoziţii compuse de mai sus.

Să discutăm mai pe larg asupra acestor tipuri de propoziţii. În primul rînd, le vom da diferite denumiri:

propoziţia compusă formată cu ajutorul lui „şi" se numeşte propoziţie *conjunctivă*;

propoziţia formată cu ajutorul expresiei „sau" va fi numită *disjunctivă*;

propoziţia formată cu ajutorul lui „dacă... atunci" va fi numită *implicativă* sau ipotetică,

propoziţia formată cu ajutorul lui „dacă şi numai dacă" va fi numită *reciproc-implicativă*,

propoziţia formată cu ajutorul lui „este incompatibil cu", va fi numită *de incompatibilitate* sau anticonjunctivă,

propoziţia formată cu ajutorul lui „nu" va fi numită *negativă*,

În fine, vom avea propoziţia simplă *afirmativă*.

Pentru a putea efectua ulterior unele abstractizări este necesar să precizăm *intenţia* fiecărui tip de propoziţie.

Propoziţia conjunctivă vrea să spună că cele două procese (evenimente, obiecte, situaţii), coexistă sub un anumit raport sau cel puţin sînt ambele prezente într-un interval dat.

În ce privește propoziția disjunctivă, intenția ei nu este prea clară, întrucît expresia „sau" în diferite contexte poate avea diferite înțelesuri. Astfel, pe un afiș dintr-un magazin de confecții poate sta scris: „aci puteți cumpăra ciorapi de mătase sau de relon". Cumpărătorul s-ar putea să găsească amîndouă felurile de ciorapi, dar s-ar putea să nu găsească decît de un fel; în ambele cazuri anunțul rămîne în vigoare.

Alt exemplu. Ne imaginăm că la o casă de cultură, pe un afiș scrie: „astă seară puteți dansa sau asculta muzică de dans". Evident că nu se impune neapărat să faci numai una din două, dar nici să le faci pe amîndouă, ci poți face, după dorință, una sau pe amîndouă.

Sensul disjuncției în acest caz va fi de „cel puțin una din două" (sau în general „cel puțin una din toate"). Această disjuncție se va numi *slabă* sau *neexclusivă*.

Dar există și un alt înțeles al lui „sau". Cînd la o bifurcare de drumuri scrie: „toată lumea este obligată să meargă sau pe drumul din dreapta sau pe cel din stînga, dar să nu se oprească pe loc", toți înțelegem că numai una din aceste posibilități putem alege, dar nu pe toate.

Sensul disjuncției în acest caz este:

„numai una din două" (sau în general „numai una din posibilitățile date").

Această disjuncție o vom numi *exclusivă*.

Înțelesul expresiei „dacă... atunci" poate de asemenea varia în mod esențial.

Astfel, cînd vorbim de procese materiale înțelegem că un proces determină alt proces (îi provoacă apariția), în așa fel încît dacă primul are loc, al doilea nu poate să nu aibă loc. Aceasta este implicația pe care o vom numi *existențială*.

„Dacă... atunci" mai poate avea și alt sens, cu totul deosebit de acesta. Astfel, cînd spunem: „dacă mercurul se urcă în termometru atunci se face cald", este evident că nu poate fi vorba de *determinarea* procesului căldurii de către procesul de urcare a mercurului. Este vorba aci de faptul că din constatarea că „mercurul se urcă în termometru" pot deduce că „se face cald".

Or, aceasta este *în mod nemijlocit* o legătură între constatări (acte intelectuale), între propoziții și numai în mod indirect o legătură între evenimente materiale. Acest gen de implicație o vom numi *deductivă*. Sensul ei este în acest caz: „din... se deduce că"

Implicația reciprocă poate de asemenea avea două sensuri: *existențial* sau *deductiv*.

Propoziția anticonjunctivă vrea să spună că „este imposibil să coexiste" evenimentele respective.

Propoziția negativă vrea să spună că evenimentul (obiectul, situația, procesul) este *absent*.

Propoziția simplă afirmativă vrea să spună că avem de-a face cu *o prezență* sau că starea de lucruri are loc.

În acest fel am delimitat cu ajutorul unor expresii, pe care le-am crezut mai clare, intențiile tipurilor de propoziții date mai sus.

Dar noi nu ne mulțumim cu faptul că propoziția *vrea să spună* (să comunice) *ceva*, că are deci o informație. Vrem să confruntăm această informație (intenție) cu *faptul* din realitate, cu domeniul faptelor (obiectelor, proceselor ș.a.m.d.). Din confruntarea *intenției* propoziției cu domeniul ei de obiecte putem scoate mai multe constatări, din care însă noi reținem două: sau că intenția este satisfăcută în domeniul de obiecte al propoziției, sau că nu este satisfăcută.

Introducem în legătură cu aceasta două definiții.

Df. 1 Vom spune că o propoziție este *adevărată* dacă și numai dacă *intenția* ei este satisfăcută în domeniul de obiecte.

Df. 2. Vom spune că o propoziție este *falsă* dacă și numai dacă intenția ei nu este satisfăcută în domeniul de obiecte.

Să convenim a nota adevărul cu *W* și falsul cu *F*.

Pentru o propoziție primă (vom înțelege de acum înainte prin propoziții prime propoziția simplă afirmativă și negativă), determinarea *caracteristicii valorice* se face direct.

Considerăm propozițiile:

(10) Brașovul se află în Transilvania

(11) Brașovul se află în Muntenia

Conform cu Df. 1, avem de determinat valoarea următoarei propoziții:

„Brașovul se află în Transilvania" este o propoziție adevărată dacă și numai dacă Brașovul se află în Transilvania (adică dacă are loc ceea ce spune). Prin simpla observație pe harta R.P.R. conchidem că Brașovul se află în Transilvania. În acest caz, conform cu Df. 2, conchidem că propoziția (10) este adevărată.

Tot conform cu Df. 1 avem de rezolvat următoarea propoziție: „Brașovul se află în Muntenia" este o propoziție adevărată dacă și numai dacă Brașovul se află în Muntenia

De asemenea, prin observarea hărții conchidem că: Brașovul nu se află în Muntenia.

Așadar, conform cu Df. 2, propoziția (11) este decretată falsă.

La fel cercetăm propozițiile *negative*:

(12) Brașovul nu se află în Muntenia

(13) Brașovul nu se află în Transilvania.

Conform cu Df. 1 și cu intenția propoziției (12) avem de rezolvat propoziția:

„Brașovul nu se află în Muntenia" este o propoziție adevărată dacă și numai dacă Brașovul nu se află în Muntenia.

Constatăm că intenția propoziției (12) este satisfăcută în domeniul de obiecte, adică în mod real Brașovul lipsește din teritoriul Munteniei. Conform cu Df. 1 vom spune că propoziția (12) este adevărată.

După același procedeu conchidem că propoziția (13) este falsă.

Să trecem acum la verificarea celorlalte tipuri de propoziții.

Propoziția conjunctivă. Fie următoarele propoziții:

(14) Luna iulie este o lună de vară.

(15) Luna august este o lună de vară.

(16) Luna ianuarie este o lună de vară.

(17) Luna martie este o lună de vară.

Cu ajutorul particulei „și" putem forma următoarele propoziții compuse:

(18) Luna iulie este o lună de vară și luna august este o lună de vară.

(19) Luna iulie este o lună de vară și luna ianuarie este o lună de vară.

(20) Luna martie este o lună de vară și luna iulie este o lună de vară.

(21) Luna ianuarie este o lună de vară și luna martie este o lună de vară.

ș.a.m.d.

Se observă ușor că pentru a rezolva propoziția luată sintetic (ca întreg) trebuie mai întîi să rezolvăm fiecare propoziție componentă în parte.

Considerăm cazul (18).

Avem de rezolvat componenta (14), apoi componenta (15) și în fine pe (18).

Componenta (14) și (15) se rezolvă conform cu Df. 1 și Df. 2 și de asemenea conform cu intențiile acestor propoziții.

Concluziile vor fi: (14) este o propoziție adevărată, (15) este o propoziție adevărată.

Rezolvînd și propoziția (18) luată ca întreg (deci conjuncția), ajungem de asemenea la concluzia că este adevărată.

Considerăm apoi propoziția (19). Se observă că intenția propoziției „luna iulie este o lună de vară și luna ianuarie este o lună de vară" nu este satisfăcută, deci propoziția este *falsă*. Componenta (14) este adevărată, iar componenta (16) este falsă.

Cazul (20). Componenta (17) este falsă, componenta (14) este adevărată, iar (20) este falsă.

Cazul (21). Componenta (16) este falsă, componenta (17) este falsă, iar (21) este falsă.

Cele patru cazuri pot fi reprezentate astfel:

Cazul (18)

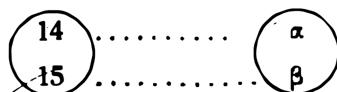


Fig. 1

Cazul (19)

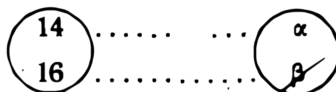


Fig. 2

Cazul (20)

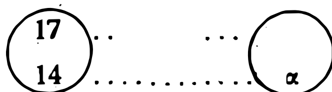


Fig. 3

Cazul (21)

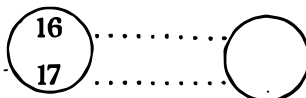


Fig. 4

Cercurile din stînga desemnează domeniul propozițiilor, cifrele sînt numele propozițiilor care intră în legătură. Cercurile din dreapta reprezintă domeniul obiectelor (evenimentelor, proceselor ș.a.m.d.) la care se referă propozițiile, unde obiectele despre care este vorba sînt notate cu literele alfabetului grec dacă sînt prezente. Pentru cazul în care sînt absente se lasă gol. Legătura dintre propoziție și domeniul de obiecte e notată printr-o linie punctată. Dacă între propozițiile (14) — (17) vom pune în loc de „și" particula „sau" (în înțelesul de neexclusiv), atunci obținem propozițiile disjunctive (18)' — (21)'. Conform cu definițiile adevărului (Df. 1) și falsului (Df. 2) și cu intenția fiecărei propoziții în parte obținem rezultatele următoare: propoziția (18)', adică „luna iulie este o lună de vară sau luna august este o lună de vară" este adevărată, propoziția (19)' este adevărată, propoziția (20)' este adevărată și propoziția (21)' este falsă.

Înainte de a trece mai departe rezumăm într-un tabel situațiile constatate pentru cele patru tipuri de propoziții: elementară, negativă, conjunctivă și disjunctivă (neexclusivă).

Afirmația poate avea una din două valori {*W*, *F*} și numai.

Dacă afirmația are *W*, negația ei are *F*, iar dacă afirmația are *F*, negația are *W* Negația este deci sub raportul valorii *inversa* afirmației.

Pentru cazul în care avem o propoziție compusă din două propoziții simple există numai patru posibilități (vezi fig. 1—4):

— ambele au valoarea *W*,
— prima are valoarea *W*, a doua *F*,
— prima are valoarea *F*, a doua *W*,
— prima are valoarea *F*, a doua *F*.

Alte posibilități nu mai există.

Există de asemenea o anumită corespondență între valorile componentelor și valorile propoziției compuse.

Iată care este situația pentru conjuncție:

W *W* — *W*
W *F* — *F*
F *W* — *F*
F *F* — *F*

Pentru disjuncția neexclusivă:

W	*W*	—	*W*
W	*F*	—	*W*
F	*W*	—	*W*
F	*F*	—	*F*

Pentru negație:

W	—	*F*
F	—	*W*

Dacă considerăm și afirmația ca un caz limită atunci putem da o reprezentare analogă și pentru ea:

W	—	*W*
F	—	*F*

Tabelele de mai sus constituie ceea ce vom numi „descrierea valorică" sau „structura valorică" a tipului de propoziție dat.

Să desprindem în continuare structura valorică a celorlalte tipuri de propoziții.

Pentru disjuncția exclusivă, conform cu intenția ei, vom avea următoarea structură:

W	*W*	—	*F*
W	*F*	—	*W*
F	*W*	—	*W*
F	*F*	—	*F*

O situație mai complicată prezintă implicația.

Considerăm propozițiile:

(22) iarna încălzim camera,

(23) se urcă mercurul în termometru,

(24) vara este frig,

(25) vara viscolește.*

Pornind de la aceste propoziții formăm *implicații existențiale.*

** (26) Dacă iarna încălzim camera atunci se urcă mercurul în termometru.

* Pentru a nu da naștere la confuzii vom presupune că propozițiile (22), (24), (25) se referă la climatul din cîmpia Dunării.

** TERMOMETRUL SE AFLĂ ÎN CAMERĂ (CONDIȚIE

(27) Dacă iarna încălzim camera atunci vara este frig.

(28) Dacă vara este frig atunci se urcă mercurul în termometru.

(29) Dacă vara viscolește atunci vara este frig.

Conform cu intenția implicației existențiale numai una din propozițiile (26) — (29) este adevărată, și anume (26) deoarece relația de *determinare* nu poate exista *dacă nu au loc ambele evenimente*. Pe de altă parte, în acest caz *nu se poate ca primul eveniment să aibă loc și să nu aibă loc cel de-al doilea.*

Celelalte propoziții satisfac pe una sau alta din aceste condiții impuse în intenția lui „dacă.... atunci" (existențial), dar nu pe amîndouă.

Structura valorică a acestei implicații este următoarea:

W	*W*	— *W*
W	*F*	— *F*
F	*W*	— *F*
F	*F*	— *F*

Cercetăm apoi implicația *deductivă.*

Construim de asemenea patru cazuri pentru două propoziții.

(30) Dacă în luna iulie mercurul se urcă în termometru atunci se face cald.

(31) Dacă vara e cald atunci bate Crivățul.

(32) Dacă vara este frig atunci coboară mercurul în termometru.

(33) Dacă vara viscolește atunci vara este frig.

Cazul (30). Prima componentă este adevărată, a doua este adevărată și a doua se deduce din prima.

Cazul (31). Prima componentă este adevărată, a doua este falsă și a doua nu se deduce din prima.

Cazul (32). Prima componentă este falsă, a doua adevărată și a doua se deduce din prima.

Cazul (33). Prima componentă este falsă, a doua este falsă și a doua se deduce din prima. Faptul că a doua propoziție se deduce din prima este tot una cu faptul că implicația este adevărată, după cum faptul că a doua propoziție nu se deduce din prima este tot una cu faptul că implicația respectivă este falsă.

Avem deci următoarea structură de valori:

W	W	—	W
W	F	—	F
F	W	—	W
F	F	—	W

Notăm că propozițiile (30) — (33) sînt entimeme (deci silogisme eliptice).

Reprezentarea lor nu mai coincide cu cea dată mai sus, deoarece în mod nemijlocit se are în vedere relația de *deducție* (dintre premise și concluzie) și nu relația de determinare între obiecte *extrapropoziționale*. Totuși, deși nu avem în vedere chiar relația dintre obiecte extrapropoziționale, fiecare propoziție în parte se referă la obiecte extrapropoziționale.

Reprezentarea va avea forma următoare pentru cazul 26.

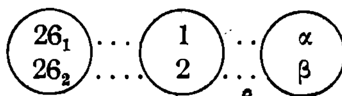


Fig. 5

Primul cerc cuprinde numele componentelor; al doilea propozițiile componente, iar al treilea domeniul de obiecte extrapropoziționale.

Ne-au mai rămas două cazuri — implicația reciprocă și incompatibilitatea. Implicația reciprocă pune exact aceleași probleme ca și implicația simplă.

Implicația reciprocă existențială are următoarea structură de valori:

W	W	—	W
W	F	—	F
F	W	—	F
F	F	—	F

Implicația reciprocă deductivă are următoarea structură valorică:

W	W	—	W
W	F	—	F
F	W	—	F
F	F	—	W

Diferența dintre implicația simplă deductivă și reciprocă deductivă apare în rîndul al treilea (*FW*). Diferența este ușor de demonstrat. Cazul *FW* este adevărat direct dar nu și invers (*WF*), or implicația reciprocă presupune și cazul invers.

În sfîrșit, pentru *incompatibilitate* avem structura următoare:

W	*W*	—	*F*
W	*F*	—	*W*
F	*W*	—	*W*
F	*F*	—	*W*

Cu aceasta am desprins structura de valori sau descrierea valorică a fiecăruia din tipurile de propoziții enumerate mai sus.

Concluzii generale. 1. Structurile de mai sus au fost desprinse din confruntarea *intențiilor* propozițiilor cu domeniul de obiecte în conformitate cu Df. 1 și Df. 2.

2. Între intenție și structura valorică există o legătură necesară.

3. Pentru propozițiile: afirmative, negative, conjunctive, disjunctive, ipotetico-deductive, reciproc-deductive și incompatibile, structura valorică este *caracteristică*.

4. Pentru implicația existențială (simplă și reciprocă) structura valorică nu este suficientă pentru a o caracteriza și trebuie să facă apel la *intenția specifică*. Considerată numai sub raport valoric relația implicativă în acest caz se reduce la conjuncție.

§ 4. FUNCȚIILE LOGICE

În cercetarea efectuată mai sus am ajuns la un rezultat foarte important: pentru majoritatea propozițiilor am desprins *structuri valorice caracteristice*.

În continuare ne vom ocupa numai de acele tipuri de propoziții pe care le putem caracteriza cu ajutorul structurilor valorice.

Caracterizînd un anumit tip de propoziție compusă am văzut că ea se poate afla la un moment dat în cel mult una din patru situații.

De exemplu, propoziția „dacă în iulie se coace grîul este cald" se află în situația: *W W — W*, iar propoziția „dacă

vara este cald atunci bate Crivățul" se află în situația $WF - F$.

Cele patru situații care descriu un anumit tip de propoziție și pe care le-am numit „structura valorică" a tipului de propoziție considerat sînt în același timp patru feluri de corespondențe univoce.

Într-adevăr, unui grup de valori al componentelor propoziției considerate îi corespunde o și numai o valoare a propoziției compuse. De ex., în cazul implicației deductive grupei de valori $\{W, W\}$ îi corespunde numai valoarea W, grupei de valori $\{W, F\}$ îi corespunde numai valoarea F, grupei de valori $\{F, W\}$ îi corespunde numai valoarea W, iar grupei de valori $\{F, F\}$ îi corespunde numai valoarea W.

Aceste corespondențe univoce ne permit să introducem noțiunea de funcție de adevăr sau în general de funcție logică. O corespondență univocă este deja o funcție, dar corespondența univocă dintre valori este subordonată și deci dependentă de intenția propozițiilor componente și a propoziției compuse, cu un cuvînt ea depinde de legătura de sens dintre cele două propoziții.

De ex., în cazul propoziției „dacă în iulie se coace grîul este cald", adevărul propoziției „în iulie se coace grîul" depinde de ceea ce spune această propoziție (altfel: dacă ceea ce spune este sau nu conform cu realitatea), adevărul propoziției „este cald" de asemenea depinde de ceea ce ea spune, iar adevărul propoziției „dacă în iulie se coace grîul este cald" depinde de faptul dacă între ceea ce vrea să spună propoziția „în iulie se coace grîul" și „este cald" e vreo legătură reală. Corespondența $WW - W$ depinde deci de legătura de sens a propozițiilor date. Tocmai de aceea, întrucît vorbim de propoziția considerată mai sus nu putem spune că valoarea întregului este funcție numai de valoarea componentelor. Corespondența univocă dintre grupa de valori a componentelor și valoarea întregului devine funcție de sine stătătoare numai prin abstracția de orice sens, de orice intenție.

Funcția care apare pe baza corespondenței univoce indicată mai sus și pe baza abstracției de orice sens se numește „funcție de adevăr". Funcția de adevăr nu trebuie confundată cu propoziția compusă. După cum am văzut, o propoziție compusă cuprinde o corespondență de valori dar nu se reduce la atît.

Într-adevăr, să presupunem că propoziția compusă ar fi reductibilă la corespondența de valori. În acest caz o propoziție ca „dacă $2 \times 2 = 4$ atunci zăpada este albă" ar fi firească și adevărată deoarece valoarea ei ar depinde doar de valoarea componentelor, or cele două propoziții „$2 \times 2 = 4$" și „zăpada este albă" sînt adevărate fără ca totuși legătura dintre ele „dacă... atunci" să fie adevărată. Nici în sens existențial relația implicativă nu este adevărată, căci faptul că $2 \times 2 = 4$ nu determină faptul că zăpada este albă și nici în sens deductiv, căci din propoziția „$2 \times 2 = 4$" nu putem deduce propoziția „zăpada este albă". Funcția de adevăr este deci o abstractizare, o idealizare. Această funcție nu are însă nimic misterios deoarece a fost abstrasă pe baza studiului unor obiecte cu totul reale — propozițiile concrete din gîndirea noastră. Definiția ei este următoarea:

Df. 3. Numim funcție de adevăr acea funcție care are ca domeniu de valori domeniul $\{W, F\}$.

Numărul de funcții de adevăr corespunde cu numărul de structuri valorice descoperite prin studiul propozițiilor.

În cazul de față am studiat șapte tipuri de propoziții compuse și vom avea corespunzător șapte tipuri de funcții. Deoarece funcțiile noastre se referă doar la două valori, ele vor mai fi numite și funcții bivalente.

Ceea ce numim logica matematică a propozițiilor este de fapt logica funcțiilor de adevăr (domeniul de valori putînd cuprinde 2, 3, sau în general n — valori).

§ 5. LIMBAJUL LOGICII PROPOZIȚIILOR

Pentru dezvoltarea logicii propozițiilor este necesar să introducem un anumit limbaj simbolic și o terminologie adecvată.

Reamintim că la începutul acestui capitol (§ 2) am notat o propoziție oarecare cu una din literele p, q, r,

Deoarece de acum încolo nu vom mai avea de-a face cu propoziții, ci numai cu valori propoziționale, vom redefini variabilele p, q, r, Literele p, q, r, vor fi numite „variabile propoziționale".

Df. 4. Numim variabile propoziționale semnele care se supun la două reguli:

R'_1. Fiecare din aceste semne poate fi raportat la oricare din valorile din domeniul $\{W, F\}$,

R'4. Fiecare din aceste semne poate fi raportat la un moment dat numai la una din aceste valori.

Faptul că un semn este raportat la o valoare poate să fie exprimat de asemenea prin „variabila ia valoarea" sau „variabila capătă semnificația" (valoarea purtînd și numele de semnificație).

Domeniul valorilor va mai fi numit și „domeniul semnificațiilor" sau „domeniul semantic"

În continuare vom introduce limbajul pentru funcțiile care au același domeniu semantic ca și variabilele definite mai sus.

Corespunzător relației „și" (corespunzător nu înseamnă identic) vom introduce semnul &. Funcția va avea forma:

1. p & q (citește: „p și q")

Corespunzător legăturii „sau" (neexclusiv) vom introduce semnul $\vee$ (de la cuvîntul latinesc *vel*) și funcția va avea forma:

2. $p \vee q$ (p sau q)

Corespunzător lui „sau" (exclusiv) [în limba latină *aut*] introducem semnul $+$ și funcția va avea forma:

3. $p + q$ (sau p sau q)

Corespunzător lui „nu" vom introduce o bară deasupra literei, și funcția va avea forma:

4. $\bar{p}$ (non-p)

Corespunzător lui „dacă... atunci" (deductiv) vom introduce semnul $\rightarrow$ și funcția va avea forma:

5. $p \rightarrow q$ (p implică q)

Corespunzător lui „dacă și numai dacă" vom introduce semnul $=$, și funcția va avea forma:

6. $p = q$ (p echivalent cu q)*.

* În legătură cu semnul „=" precizăm următoarele.
Acest semn va juca în lucrarea noastră un triplu rol: a) rol de operator, b) rol de semn de relație între expresii, c) rol de semn de definiție.
Folosirea lui într-o accepție sau alta va fi anunțată ori de cîte ori este necesară.

Şi, în fine, corespunzător *incompatibilităţii* introducem semnul /, adică funcţia de forma:

7. p/q (p incompatibil cu q).

Întrucît vom raporta funcţia la domeniul semantic, variabilele vor purta şi numele de argumente, iar întrucît vom raporta funcţia la forma (expresia ei) vom numi variabilele şi membri sau componentele expresiei (expresia funcţională).

Funcţiile vor purta numele următoare: funcţia p & q se va numi conjunctivă, funcţia $p \vee q$ se va numi disjunctivă, funcţia $p + q$ se va numi exclusivă (sau excludere), funcţia $p \rightarrow q$ se va numi funcţie implicativă (implicaţie materială), funcţia $p = q$ se va numi echivalenţă, iar funcţia p/q se va numi incompatibilitate (anticonjuncţia). Semnele „&", „$\vee$", „+", „—", „$\rightarrow$", „=„ şi „/" vor fi numite *functori* sau *operatori logici propoziţionali*. Fiecare functor va purta numele funcţiei corespunzătoare. Ex., functorul „&" se va numi „functorul conjuncţiei". Expresiile funcţiilor se mai numesc şi „formule logice".

Înainte de a trece mai departe se impune o anumită generalizare. Noi am operat pînă acum cu propoziţii care au cel mult doi membri şi respectiv cu funcţii de două variabile. Or, numărul propoziţiilor componente poate creşte pentru anumite funcţii oricît de mult, respectiv numărul argumentelor funcţiei. Construcţia structurilor valorice pentru cazul cu n argumente (unde $n > 2$) se face exact după procedeele de mai sus şi nu prezintă nici o importanţă sub aspectul procedurii. Reamintim că menţinem punctul de vedere iniţial, „finit" înseamnă „nu se încheie aici, dar se încheie undeva", iar din punct de vedere operatoriu vom folosi termenul de „finit" în înţelesul de practic realizabil.

Funcţiile de o singură variabilă (cu un singur argument) vor fi numite „funcţii singulare" sau „funcţii monadice" De acest fel este negaţia (ex. $\bar{p}$). Funcţiile cu două variabile (două argumente) vor fi numite „funcţii diadice" (ex. p & q, $p \rightarrow q$), funcţiile cu trei variabile vor fi numite „triadice" (ex. p & q & r, $p \vee q \vee r$) ş.a.m.d.* O funcţie de un număr oarecare de variabile va fi numită în general „funcţie poliadică" Nu toate funcţiile sînt poliadice. Negaţia este

* Corespunzător acestei clasificări a funcţiilor avem o clasificare a operatorilor (functorilor): operatori uninari, binari, ternari etc.

monadică, implicaţia materială şi incompatibilitatea sînt funcţii diadice, iar conjuncţia şi disjuncţia sînt poliadice.

Evident că în expresiile funcţiilor cu un număr de argumente $n > 2$ functorul considerat se repetă. Ex. $p \& q \& r \& \ldots \& t$; $p \vee q \vee r \vee \ldots \vee t$.

Considerînd expresiile funcţionale sub raportul numărului de operatori putem trata variabilele tot ca expresii funcţionale, şi anume expresii funcţionale cu un număr de operatori egal cu zero. Altfel spus variabilele sînt funcţii la limită.

Putem construi apoi funcţii de funcţii, în particular funcţii mixte (expresiile lor conţin functori diferiţi).

Pentru a putea scrie asemenea funcţii trebuie să introducem unele semne ajutătoare care nu au semnificaţie de sine stătătoare.

Asemenea semne vor fi parantezele rotunde ( ) şi drepte [ ] şi acoladele { }

Ex. de funcţii mixte:

$$(p \& q) \vee (p \& r)$$

$$\{[(p \rightarrow q) \vee (p \& r)] = (p \vee r)\} + (p \rightarrow q)$$

Semnele ajutătoare ne arată în ce ordine trebuie citite expresiile, altfel spus ele separă expresiile de ordin diferit.

Ordinul funcţiei îl definim astfel:

Df. *4*. a) variabilele sînt funcţii de ordinul 1.

b) dacă $\varphi(f_1, f_2, \ldots)$ este o funcţie de funcţii atunci ordinul acestei funcţii este egal cu $max(f_1, f_2, \ldots) + 1$.

Exemple. Fie funcţiile $f(p, q)$ şi $\varphi(f_1, f_2)$ definite astfel: $f(p, q) = p \& q$; $\varphi(f_1, f_2) = (p \rightarrow q) \& r$. Funcţia $f(p, q)$ are ordinul 2, deoarece $max(p, q) = 2$. $\varphi(f_1, f_2)$ are ordinul 3, deoarece f_1 (adică $p \rightarrow q$) are ordinul 2, iar f_2 (adică r) are ordinul 1, şi deci $max(f_1, f_2) = 2$.

Pentru a desemna o funcţie de un ordin oarecare vom folosi literele *A*, *B*, *C*,

Deosebirea dintre variabilele *p*, *q*, *r*, şi variabilele *A*, *B*, *C*, constă în faptul că primele au ca domeniu semantic semnificaţiile *W*, *F*, iar celelalte au ca domeniu semantic domeniul funcţiilor de un ordin oarecare.

Variabilele *A*, *B*, *C*, ... pot fi de asemenea legate cu ajutorul functorilor amintiţi, creînd expresii noi.

În afară de semnele introduse deja, se mai folosesc *nume pentru funcții*.

Pentru a denumi prescurtat o funcție putem folosi una din expresiile $f(p, q, \ldots)$, $\varphi(f_1, f_2, \ldots)$ cu sau fără indici.

Expresiile $f(p, q, \ldots)$ desemnează de obicei funcții de ordinul 1, dar pot desemna și funcții de alt ordin, iar expresiile $\varphi(f_1, f_2, \ldots)$ desemnează funcții de funcții sau altfel spus funcții de ordin superior. În paranteză sînt așezate argumentele funcției. Ex. $f(p, q) = (p \& q) \vee p$. Aci semnul „=" joacă rol de semn de definiție. Expresiile unei funcții (formulele) vor fi notate cu $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (cu sau fără indici)*.

Alte semne ajutătoare vor fi introduse după nevoie.

Uneori este necesar să facem scrierea mai comodă. De exemplu, în locul semnului „&" este mai comod să folosim semnul „ ·" Vom scrie în loc de $p \& q$, $p \cdot q$.

În expresiile în care apar deopotrivă functorii „&" și „$\vee$" putem suprima pe unul dintre ei. Dacă este scris semnul „&" este subînțeles „$\vee$", iar dacă este scris semnul „$\vee$" este subînțeles „&".

Ex., în expresia „$p\,q \vee q\,r$" este subînțeles semnul „&", iar în expresia „$p\,q \,\&\, p\,r$" este subînțeles semnul „$\vee$".

Pentru a regla raportul dintre variabile și domeniul semantic și dintre o variabilă și restul variabilelor de același tip vom introduce două reguli.

R_3. *Regula substituției*. Orice variabilă poate fi înlocuită cu oricare simbol de semnificație {W, F} și numai cu unul în același timp. Înlocuirea se face pretutindeni unde ea apare în expresia dată.

R_4. *Regula redenumirii*. Orice variabilă poate fi înlocuită cu oricare altă variabilă de același tip care nu apare în expresia dată. Înlocuirea se face pretutindeni unde apare variabila care va fi înlocuită.

Substituția și redenumirea sînt în fond două cazuri particulare de înlocuire și vor fi notate astfel $\alpha S \beta$, unde

---

*Despre o funcție spunem că este denumită fie cu ajutorul unui nume *structural descriptiv* (o expresie din limbajul logic adoptat), fie cu ajutorul unui *nume propriu* (o prescurtare) De exemplu, implicația este denumită prin „$p \rightarrow q$" sau prin $f_1(p, q)$ sau alte nume (fie structurale, fie proprii).

O altă precizare constă în aceea că nu vom face nici o deosebire între a spune: „o funcție este adevărată" și „o expresie este adevărată"

α este variabila de substituit (de redenumit), iar β semnificația (variabila) cu care o înlocuim.

Ex. 1. Să se opereze pSw în formula:

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot r) = (p \vee s)$$

Obținem: $(w \cdot q) \vee (w \cdot r) = (w \vee s)$

Ex. 2. Să se opereze qSr în formula:

$$(p \cdot q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

Obținem:

$$(p \cdot r) \rightarrow (r \rightarrow p)$$

Cu aceasta încheiem considerațiile de limbaj.

§ 6. DEFINIȚIILE FUNCȚIILOR LOGICE

Df. 5. Numim *conjuncție* funcția care ia valoarea W atunci și numai atunci cînd toate argumentele ei iau valoarea *W*.

Df. 6. Numim *disjuncție neexclusivă* (alternativă) funcția care ia valoarea *W* atunci și numai atunci cînd cel puțin un argument al ei ia valoarea *W*.

Df. 7. Numim *disjuncție exclusivă* (excludere) funcția care ia valoarea *W* atunci și numai atunci cînd valorile argumentelor ei diferă.

Df. 8. Numim *negație* funcția care ia valoarea *W* atunci și numai atunci cînd argumentul ei ia valoarea *F*.

Df. 9. Numim *implicație materială* funcția care ia valoarea *F*, atunci și numai atunci cînd antecedentul ia valoarea *W*, iar consecventul ia valoarea *F*.

Implicația aceasta poartă numele, după cum am mai spus, de „implicație materială" Esența și originea ei au fost discutate mai sus. Ea este expresia structurii valorice a raportului de deducție, de conchidere de la premise la concluzie, de la antecedent la consecvent. Deducția poate fi adevărată (corectă) în trei cazuri: dacă premisele sînt adevărate și concluzia adevărată, dacă premisele sînt false și concluzia adevărată, dacă premisele sînt false și concluzia este falsă. Faptul că deducția (conchiderea) poate fi adevărată și atunci cînd premisele sînt false este de o

importanţă. „Într-adevăr, să presupunem, de exemplu, că este dovedit faptul că ipoteza *B*, care este o afirmaţie a teoriei numerelor, se reduce la ipoteza lui Riemann, pe care noi o desemnăm prin *A*. Nu se ştie, este justă sau nu ipoteza lui Riemann, totuşi reducţia, adică afirmaţia că «din *A* urmează *B*», este justă. În acest fel noi socotim că afirmaţia «din *A* urmează *B*» în cazul dat este justă, deşi *A* poate să fie şi fals. Pe de altă parte, reducţia atunci şi numai atunci prezintă interes, cînd nu se ştie dacă este adevărată premisa *A*. Dacă am fi ştiut într-adevăr că premisa este adevărată, atunci reducţia ar fi revenit la demonstraţia lui *B*"[1].

Df. 10. Numim *echivalenţă* funcţia care ia valoarea *W* atunci şi numai atunci cînd toate argumentele ei iau valoarea *W*, sau toate argumentele ei iau valoarea *F*.

Df. 11. Numim *incompatibilitate* (sau funcţia lui Sheffer) funcţia care ia valoarea *F*, atunci şi numai atunci cînd ambele argumente iau valoarea *W*.

Raportul de incompatibilitate este cunoscut din logica elementară. Într-adevăr, unul dintre raporturile din pătratul logic — contrarietatea — satisface condiţia impusă incompatibilităţii.

Judecăţile *A* (universal-afirmativă) şi *E* (universal-negativă) nu pot fi împreună adevărate. Evident, se are în vedere şi faptul că între *A* şi *E* există o legătură de sens, adică *E* reprezintă negarea universală a ceea ce spune *A*. În logica noastră însă noi facem abstracţie de acest sens.

R_6. Dacă pentru funcţiile enumerate nu sînt satisfăcute condiţiile impuse de definiţiile Df. 3 — Df. 9, atunci funcţiile vor avea valoarea inversă celei indicate în Df. respectivă.

Definiţiile 3 —11 şi regulile 1—5 sînt necesare pentru rezolvarea oricărei probleme a logicii propoziţiilor.

În ce priveşte Df. 1 şi Df. 2 ele îşi pierd rostul aici.

Logica construită pe baza Df. 3 — Df. 11 şi a R_1 — R_6 va fi numită „logica propoziţiilor" iar sistemul care are la bază definiţii şi reguli va fi numit „sistem definiţional".

În caz particular funcţiile pot fi definite cu ajutorul unor tabele de valori numite şi „matrice"

[1] P. S. N o v i k o v, *Elemente de logică matematică*, Moscova, 1959, p. 40.

O matrice este un tabel constituit în felul următor:

$p\ q$	$f(p, q) \ldots$

În stînga sus sînt așezate argumentele, iar în dreapta sus este așezată funcția. În stînga jos sînt așezate valorile variabilelor, iar în dreapta jos sînt așezate valorile corespunzătoare ale funcției.

Este util să introducem în legătură cu valorile argumentelor următoarea definiție:

Df. 12. Numim *alegere* o grupă de valori pe care le iau toate argumentele unei funcții la un moment dat.

Ex. funcția $f(p, q)$ are patru alegeri *W W*, *W F*, *F W*, *F F*.

În general o funcție poate avea un număr de 2^n alegeri, unde n este numărul de argumente diferite pe care le conține funcția. Pentru $n = 2$ vom avea $2^2 = 4$, adică 4 alegeri, pentru $n = 3$ vom avea $2^3 = 8$, adică 8 alegeri.

În ce privește matricele, ele pot fi folosite pentru funcții cu cel mult trei argumente. Pentru un număr mai mare de argumente ele devin greoaie și chiar practic imposibile.

Vom construi cîteva matrice pentru funcțiile în care $n \leqslant 3$

1. *Matricea negației*

p	$\bar{p}$
W	*F*
F	*W*

2. *Matricea conjuncției*

$p\ q$	$p \cdot q$
W W	*W*
W F	*F*
F W	*F*
F F	*F*

3. *Matricea disjuncției (neexclusive)*

p q	$p \vee q$
W W	W
W F	W
F W	W
F F	F

4. *Matricea disjuncției exclusive*

p q	$p + q$
W W	F
W F	W
F W	W
F F	F

5. *Matricea implicației*

p q	$p \rightarrow q$
W W	W
W F	F
F W	W
F F	W

6. *Matricea echivalenței*

p q	$p = q$
W W	W
W F	F
F W	F
F F	W

7. *Matricea incompatibilității*

p q	p/q
W W	F
W F	W
F W	W
F F	W

Iată şi două matrice pentru $n = 3$

$p\ q\ r$	$p \cdot q \cdot r \cdot$
W W W	W
W W F	F
W F W	F
W F F	F
F W W	F
F W F	F
F F W	F
F F F	F

$p\ q\ r$	$p \vee q \vee r$
W W W	W
W W F	W
W F W	W
W F F	W
F W W	W
F W F	W
F F W	W
F F F	F

§ 7. TABELUL FUNCŢIILOR BIVALENTE

O problemă interesantă este următoarea: cîte funcţii diferite pot fi construite pornind de la n variabile? Pentru cazul în care avem două variabile problema se rezolvă uşor cu ajutorul unui tabel.

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	F	F	F	F	F	F	F	F
W	F	W	W	W	W	F	F	F	F	W	W	W	W	F	F	F	F
F	W	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F
F	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F

Se observă că numărul funcțiilor este de 2^{2^2}, adică 16. În general numărul funcțiilor se calculează după formula $N = 2^{2^n}$, unde n este numărul de argumente, iar 2 reprezintă numărul valorilor. Dacă notăm cu m numărul valorilor, atunci obținem o formulă care ne dă numărul de funcții pentru o logică cu un număr de valori oarecare.

Această formulă este:

$$N = m^{m^n}$$

Avantajul tabelului de mai sus constă în faptul că ne dă imaginea fiecăreia din cele 2^{2^n} funcții posibile.

Unele din cele 16 funcții sînt cunoscute, ele au fost descoperite pe calea studierii unor cazuri particulare. Cunoscute sînt funcțiile f_2, f_5, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{13}.

De ex., f_2 este disjuncția, f_5 este implicația, f_{11} și f_{13} sînt respectiv negațiile lui q și p.

Procedeul acesta pur combinatoric ne dezvăluie și funcții pe care nu le-am cunoscut pe cale empirică.

Funcțiile f_1 și f_{16} au un caracter cu totul neobișnuit. Funcția f_1 este adevărată independent de valoarea argumentelor ei, iar funcția f_{16} este falsă independent de valoarea argumentelor ei.

Aceste funcții extreme sînt deosebit de importante: funcțiile de tipul f_1 vor fi numite „identic-adevărate", „identități logice", „legi logice" sau „tautologii"; funcțiile de tipul f_{16} vor fi numite „contradicții logice" sau „identic-false".

Vom introduce deci două noi definiții:

Df. 13. Numim *lege logică* o funcție logică adevărată pentru orice alegere de valori.

Df. 14. Numim *contradicție logică* o funcție logică falsă pentru orice alegere de valori.

Deja izolarea funcțiilor f_1 și f_{16} evidențiază un anumit raport între valorile lor, și anume valorile uneia sînt *inversul* celeilalte. Astfel că putem scrie:

$$f_1 = \bar{f}_{16} \text{ și } f_{16} = \bar{f}_1$$

Acest raport duce la următoarea concluzie importantă: unele funcții diferă numai ca formă, ex. f_1 și $\bar{f}_{16}$.

Funcția f_3 ne este necunoscută. Prin confruntarea cu funcțiile cunoscute se constată însă că ea se află în raport

bine determinat cu f_5, adică cu implicaţia. Diferenţa lor apare numai la mijloc:

f_3	f_5
W	W
W	F
F	W
W	W

Această funcţie care este o implicaţie întoarsă va fi numită „implic ţia inversă" (sau „invers implicaţia")

Ea are forma $q \rightarrow p$

Funcţia f_4 este o funcţie cu totul trivială, adică este însăşi p, deci:

$$f_4 = p \text{ (afirmare de } p).$$

Iată în continuare funcţiile noi:

$f_6 = q$ (afirmare de q)

$f_{12} = \bar{f}_5$ (negarea implicaţiei)

$f_{14} = \bar{f}_3$ (negarea implicaţiei inverse)

$f_{15} = \bar{f}_2$ (negarea disjuncţiei).

O privire atentă asupra tabelului arată că începînd de la mijloc la stînga şi la dreapta funcţiile sînt opuse simetric astfel:

f_8 cu f_9

f_7 cu f_{10}

f_6 cu f_{11}

$\vdots \qquad \vdots$

f_1 cu f_{16}

Această opoziţie înseamnă că o funcţie este negarea celeilalte. Deci dacă am hotărît să socotim partea dreaptă pozitivă, atunci stînga va fi reprezentată cu ajutorul negării funcţiilor din dreapta şi invers.

Acestea sînt cele mai importante aspecte pe care ni le dezvăluie tabelul funcţiilor bivalente.

În cele ce urmează vom defini o serie de proprietăţi cunoscute încă din matematică şi vom vedea în ce măsură funcţiile logice se bucură de aceste proprietăţi.

Df. 15. Spunem că o operaţie este *comutativă* dacă şi numai dacă rezultatul ei nu depinde de ordinea membrilor ei.

Df. 16. Spunem că o operaţie este *asociativă* dacă rezultatul ei nu depinde de gruparea membrilor ei.

Ştim din matematică faptul că operaţiile „+" şi „×" sînt comutative, ceea ce în caz particular înseamnă:

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

Aceleaşi operaţii sînt asociative:

$$a + b + c = (a+b) + c$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

În logică, de aceste proprietăţi se bucură în primul rînd conjuncţia şi disjuncţia.

În caz particular avem:

$$\left.\begin{matrix} p \,\&\, q = q \,\&\, p \\ p \vee q = q \vee p \end{matrix}\right\} \text{comutativitate.}$$

$$\left.\begin{matrix} p \,\&\, (q \,\&\, r) = (p \,\&\, q) \,\&\, r \\ p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r \end{matrix}\right\} \text{asociativitate.}$$

Echivalenţa este de asemenea comutativă:

$$(p = q) = (q = p)$$

La fel, incompatibilitatea este comutativă:

$(p/q) = (q/p)$. În cercetarea proprietăţilor ţinem seama de faptul că incompatibilitatea este operaţie * diadică. Verificarea acestor proprietăţi o vom da într-un paragraf următor.

* Analogia cu operaţiile aritmetice a făcut ca funcţiile logice să fie numite „operaţii logice", iar functorii, „operatori logici". Există însă alt motiv pentru care functorii pot fi numiţi operatori. Ei pot fi trataţi ca mijloace de formare a unor expresii din alte expresii.

Remarcăm însă faptul că în timp ce proprietatea de comutativitate nu schimbă ordinul expresiei, asociativitatea, dimpotrivă, îl schimbă, astfel că o expresie de ord_2 * devine echivalentă cu o expresie de ord_3 și în general o expresie de ordinul i poate deveni echivalentă în funcție de caz cu o expresie de ordinul j $(j > i)$. Ex. $p \vee q \vee r = (p \vee q) \vee r$.

Din proprietatea de *asociativitate* decurge o regulă importantă pentru paranteze.

R_6. *Dacă operația este asociativă, atunci parantezele pot fi puse sau desființate după nevoie.*

Într-adevăr, fie:

$$(1) \quad p \vee q \vee r = (p \vee q) \vee r$$

Conform cu comutativitatea echivalenței putem comuta membrii echivalenței (1), astfel că obținem:

$$(2) \quad (p \vee q) \vee r = p \vee q \vee r$$

În acest fel funcția dată prin expresia „$(p \vee q) \vee r$" ai cărei termeni sînt grupați diferit, poate fi exprimată prin „$p \vee q \vee r$" (expresie fără paranteze).

O altă proprietate care de astă dată privește numai funcții mixte este proprietatea cunoscută din matematică sub numele de *distributivitate*.

Df. 17. Spunem că o operație este *distributivă* față de alta dacă rezultatul nu depinde de ordinea în care sînt efectuate operațiile date.

Astfel, în matematică:

$$a (b + c) = ab + ac$$

Se observă că este indiferent dacă adun mai întîi pe b cu c și apoi înmulțesc rezultatul cu a, sau dacă înmulțesc pe a cu fiecare în parte și adun rezultatele înmulțirii. În acest caz spunem că „înmulțirea este distributivă față de adunare".

În logică, conjuncția și disjuncția se bucură de această proprietate una față de alta. În caz particular avem:

$$p \mathbin{\&} (q \vee r) = (p \mathbin{\&} q) \vee (p \mathbin{\&} r)$$

$$p \vee (q \mathbin{\&} r) = (p \vee q) \mathbin{\&} (p \vee r)$$

---

* Ord — prescurtare pentru cuvîntul „ordin".

Alte proprietăţi. Echivalenţa şi implicaţia se bucură de două proprietăţi importante, şi anume *reflexivitatea* şi *tranzitivitatea*.

Df. 18. Numim *reflexivă* acea relaţie R care satisface condiţia $\varphi \, R \, \varphi$.

Implicaţia şi echivalenţa sînt reflexive:

$$p \rightarrow p$$

$$p = p$$

Df. 19. Numim *tranzitivă* acea relaţie R care satisface următoarea condiţie: dacă $\varphi_1 \, R \, \varphi_2$ şi $\varphi_2 \, R \, \varphi_3$, atunci $\varphi_1 \, R \, \varphi_3$.

Implicaţia şi echivalenţa satisfac această condiţie:

$$[(p \rightarrow q) \quad (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$[(p = q) \quad (q = r)] \rightarrow (p = r)$$

Acestea sînt cele mai importante proprietăţi ale operaţiilor şi respectiv ale relaţiilor logice. *

§ 9. LOGICA BOOLEEANĂ (L_B)

Din tabelul funcţiilor bivalente s-a desprins o proprietate importantă, anume posibilitatea de a reduce o expresie logică la alta, altfel spus posibilitatea de a da pentru una şi aceeaşi funcţie logică două sau mai multe expresii diferite.

De exemplu, $\overline{p \cdot q}$ şi p/q sînt două funcţii diferite numai ca formă, tabelele (matricele) lor de valori sînt identice.

Această posibilitate de a reduce expresiile logice unele la altele este mult mai largă decît la prima vedere. Se ştie că încă în logica generală s-a încercat reducerea unor judecăţi la altele.

Desigur este absurd să credem că am putea reduce chiar o funcţie la alta. Este vorba de moduri diferite de a exprima una şi aceeaşi funcţie. Ce-i drept, această posibilitate este întemeiată pe o întrepătrundere reală a raporturilor logice. Un raport real apare uneori ca o „intersecţie" a altora. De aci şi posibilitatea de a identifica de ex. o formulă mixtă (construită cu mai mulţi operatori) cu o formulă omogenă (construită cu un singur fel de operator) sau cu o formulă mixtă diferită de prima.

---

* Ca exerciţiu, propunem cititorului să verifice dacă restul funcţiilor au proprietăţile de mai sus.

Este vorba deci, în mod real, de a considera o „intersecție" de raporturi sub un anumit unghi ca pe un raport simplu, sau de a privi un raport simplu ca pe o intersecție sau alta de alte raporturi, iar în reflectare este vorba de a găsi expresii diferite pentru una și aceeași idee (concept). Tocmai de aceea reducerea expresiilor logice una la alta nu este o operație cu totul lipsită de o semnificație obiectivă.

Am spus că posibilitatea reducerii expresiilor logice una la alta este foarte largă. În fapt tocmai pe această posibilitate se bazează întregul calcul logic.

Logica propozițiilor poate lua diferite forme avînd în vedere faptul că unii functori pot fi luați ca functori de bază, reducînd prin definiție tot restul functorilor la aceștia.

Condiția construirii unei anumite forme pentru logica propozițiilor este așadar aceea ca functorii aleși să fie suficienți și necesari pentru exprimarea celorlalți.

Iată cîteva posibilități de alegere:

1. &, +, — (Boole)
2. →, — (Frege)
3. ∨, — (Russell)
4. &, ∨, — („algebra" booleeană)
5. ≡, — (Tarski)
6. / (Nicod)
7. &, — (Brentano)
8. +, & (Jegalkin).

Conform cu operatorii aleși, un calcul va căpăta o formă sau alta. În ce privește optarea pentru un calcul sau altul ea se va face pe baza anumitor criterii de ordin teoretic sau practic.

De ex., pentru reprezentarea schemelor cu relee și contacte e convenabil un sistem {&, ∨, —}, pentru reprezentarea funcțiilor neuronale putem folosi un sistem în care intră doar semnul „/"

Pentru început vom alege un sistem construit cu ajutorul operatorilor

&, ∨, —

Acest sistem va fi numit „logică booleeană" în cinstea întemeietorului primului calcul logic, matematicianul irlandez G. Boole care a luat ca functori de bază functorii disjuncției, conjuncției, negației.

Ce-i drept, sistemul „logicii booleene" nu mai corespunde întru totul cu calculul lui Boole, care de fapt folosea operatorii +, —, iar & era pur și simplu înlocuit cu operația gramaticală de aplicare a unui cuvînt la altul (ex., „rațional" pentru „animal", adică „animal rațional"). În sistem va intra obligatoriu și simbolul „=" care însă va fi interpretat exclusiv ca o *relație* și va sluji la exprimarea legilor logice.

Ex., expresiile

$$p \vee \bar{q} \quad p \cdot q,$$

$$p \vee q = q \vee p$$

sînt expresii ale logicii booleene.

Dimpotrivă, expresia

$$(p \rightarrow q) = r$$

nu aparține logicii booleene.

Logica booleeană este echivalentă cu orice alt sistem de logică bivalentă construit cu alți operatori de bază. Aceasta înseamnă că în logica booleeană pot exprima orice funcție de adevăr care poate fi exprimată în altă formă (cu alți operatori de bază) și care în general poate fi construită în logica propozițiilor.

Mai mult, ea este de aceeași putere cu oricare alt sistem format cu alți operatori, în sensul că orice expresie formată într-un sistem cu alți operatori de bază poate fi tradusă în logica booleeană.

În ce privește termenul de „logică booleeană" el este evident folosit numai într-un sens formal, avînd în vedere că această „logică" diferă numai în expresie de orice alt sistem al logicii bivalente a propozițiilor (de ex. de sistemul bazat numai pe echivalență și negație). Altfel spus este vorba de o diferență de limbaj. E poate mai potrivit termenul de „calcul" sau de „formă" (forma booleeană a logicii). Folosirea în continuare a termenului de „logică" nu duce însă la confuzii dacă avem în vedere înțelesul restrîns stabilit aci.

Pentru a putea traduce în logica booleeană o expresie construită cu operatori nebooleeni, trebuie să introducem un șir de „definiții de întrebuințare" *(Gebrauchsdefinitionen)*.

Iată aceste definiţii:

Df. 20. $p \rightarrow q = \bar{p} \vee q$

Df. 21. $p + q = (p \cdot \bar{q}) \vee (q \cdot \bar{p})$

Df. 22. $(p \equiv{}^{*} q) = (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{q} \vee p)$

Df. 23. $p \mid q = \bar{p} \vee \bar{q}$

Exemple de traduceri

Ex. 1. Considerăm expresia $(p \rightarrow q) \rightarrow r$.

Traducerea ei se face conform cu Df. 20, astfel:

a) în primul rînd traducem membrul 1 al expresiei, adică $p \rightarrow q$, ceea ce dă:

$$\bar{p} \vee q;$$

b) traducem apoi expresia luată ca întreg $(\bar{p} \vee q) \rightarrow r$ şi obţinem:

$\overline{\bar{p} \vee q} \vee r$, ceea ce este o expresie a logicii booleene.

Ex. 2. Să se traducă în logica booleeană expresia $(p \equiv q) \mid r$

Traducem membrul întîi, adică $p \equiv q$ şi obţinem:

$$(\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{q} \vee p)$$

Traducem apoi expresia întreagă, adică:

$[(\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{q} \vee p)] \mid r$ şi obţinem:

$$\overline{(\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{q} \vee p)} \vee \bar{r}$$

Observăm că am folosit termenul de „traducere" pentru a marca operaţiile de mai sus. Într-adevăr este vorba de traduceri întrucît se pune problema de a trece de la un limbaj la altul (de la limbajul nebooleean la cel booleean în cazul nostru).

Pentru operaţii în cadrul unuia şi aceluiaşi limbaj este mai bine să folosim termenul de „transformare" (respectiv „transformare logică") sau de „calcul logic"

---

* Semnul „=" joacă aici rol de operator, iar la mijlocul definiţiei joacă rol de semn de definiţie, ceea ce este indicat de prescurtarea Df. aşezată în faţa expresiei.

În § 7 am făcut cunoștință cu ideea de lege logică (Df. 13). Orice sistem de logică este caracterizat pe lîngă forma sa și de un grup de legi logice. Aceste legi logice caracterizează funcțiile corespunzătoare operatorilor dați și raportul dintre acești operatori.

Ideea de lege logică nu face excepție de la ideea de lege în general. Iată cum definim ideea de lege în general.

Df. 25. Spunem că o proprietate sau o relație este lege dacă și numai dacă ea este general-valabilă și necesară pentru toate obiectele unui anumit domeniu.

În § 8 noi am enunțat anumite proprietăți ale operațiilor și relațiilor logice indicînd anumite cazuri particulare pentru ele.

Astfel, proprietatea comutativității este o lege pentru conjuncție, la fel pentru disjuncție. Proprietatea asociativității este de asemenea o lege atît pentru conjuncție cît și pentru disjuncție.

În ce privește formularea legii se impun unele precizări. Legile pot fi date în simboluri sau cu ajutorul limbilor naturale (ex., limba romînă, limba franceză etc.).

Există însă anumite limite în ce privește formularea legilor cu ajutorul simbolurilor, limite provenite din faptul că nu toată terminologia utilă pentru formularea unei legi este cuprinsă în simbolismul logicii propozițiilor. De exemplu, expresia „$p \cdot q = q \cdot p$" este departe de a fi o formulare completă a legii comutativității conjuncției. Se vede dintr-o dată că o asemenea formulă nu e valabilă decît pentru *perechi* de propoziții, dar nu pentru toate propozițiile. Expresia „$p \cdot q \cdot r = r \cdot q \cdot p$" este valabilă numai pentru trei propoziții deodată. Nici expresiile construite cu ajutorul simbolurilor A, B, C, nu scapă de această limită. Numai limba obișnuită (naturală) ne poate ajuta să dăm formulări universal-valabile logicii propozițiilor. Legile exprimate cu ajutorul simbolurilor nu sînt decît cazuri particulare ale legilor formulate cu ajutorul limbii obișnuite, altfel spus „imagini particulare".

Iată, de exemplu, definiția generală a legilor comutativității:

Legea 1. Valoarea conjuncției este independentă de ordinea argumentelor ei.

Legea 2. Valoarea disjuncției este independentă de ordinea argumentelor ei.

Expresiile „$p \cdot q = q \cdot p$", „$p \vee q = q \vee p$" sînt două imagini particulare corespunzătoare respectiv legii 1 și legii 2.

Practic însă noi ne putem mulțumi în calcul cu imagini particulare ale legilor.

În continuare vom da cele mai importante legi ale logicii booleene, iar apoi pe măsura introducerii de noi operatori și legile logicii propozițiilor în general.

§ 11. LEGILE LOGICII BOOLEENE

1. $p \quad q = q \cdot p$
2. $p \vee q = q \vee p$
3. $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$
4. $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$
5. $p \cdot (q \vee r) = (p \cdot q) \vee (p \cdot r)$
6. $p \vee (q \cdot r) = (p \vee q) \quad (p \vee r)$
7. $\overline{p \vee q} = \bar{p} \cdot \bar{q}$
8. $\overline{p \quad q} = \bar{p} \vee \bar{q}$

Acesta este un prim grup de legi în care recunoaștem ușor legile comutativității (1, 2), legile asociativității (3,4), legile distributivității (5, 6), legile numite ale lui Morgan (7, 8).

Un alt grup de legi cuprinde în formulare simbolurile improprii W, F.

9. $\bar{F} = W$
10. $\bar{W} = F$
11. $p \cdot W = p$
12. $p \cdot F = F$
13. $p \vee F = p$
14. $p \vee W = W$

Legile 9, 10 exprimă raportul dintre adevăr şi fals şi decurg din definiţia dată anterior acestor două simboluri.
Legile 11—14 vor fi numite *legile posibilităţii*.
Avem apoi două legi clasice:

15. $p \vee \bar{p} = W$ (legea terţiului exclus).

16. $p \cdot \bar{p} = F$ (legea noncontradicţiei).

Legile 1—16 descriu sistemul L_B şi de aceea sînt legi de bază.
Ele sînt indispensabile diferitelor transformări. Vom considera apoi un şir de legi derivate din acestea.
Legile de mai sus pot fi formulate ceva mai general cu ajutorul literelor A, B, C

Ex.: 1′ $A \quad B = B \cdot A$

2′ $A \vee B = B \vee A$

15′ $A \vee \bar{A} = W$

16′ $A \quad \bar{A} = F$

Deosebit de importante sînt următoarele legi pentru transformările logice.

17. $p \vee (p \cdot q) = p$

18. $p \cdot (p \vee q) = p$

19. $p \vee p = p$

20. $p \cdot p = p$

21. $p\, q \vee p\, \bar{q} = p$

Legile 17, 18 se numesc „legile absorbției", legile 19, 20 — „legile idempotenței", iar legea 21 este „legea excluderii (contopirii)" *.

§ 12. LOGICA LUI JEGALKIN (L_J)

Logicianul rus Jegalkin a construit un calcul al propozițiilor luînd ca operatori de bază excluderea (+) și conjuncția (&). Printre legile specifice calculului lui Jegalkin sînt următoarele:

22. $p + q = q + p$

23. $p + (q + r) = (p + q) + r$

24. $p\ (q + r) = pq + pr$

25. $p + F = p$

26. $p + p = F$

---

*Atunci cînd considerăm expresiile 1—21 ca descrieri ale sistemului L_B vom folosi termenul de „lege"

Pe baza legilor formulate cu ajutorul semnului „=" (ca de altfel și cu semnul „→", ceea ce se va vedea mai departe) construim reguli de transformare. O regulă poate fi scrisă astfel: $\frac{A}{B}$

Linia „ — " indică trecerea de la A la B. În general, regula de transformare este o schemă bazată pe *modus ponens* în care însă suprimăm premisa majoră.

Ex. (1) $A \cdot B = B \cdot A$ (legea)

$A \cdot B$ (supoziția)

— (semnul trecerii)

$B \cdot A$ (concluzia).

Suprimînd premisa majoră care e întotdeauna legea de la care plecăm, obținem:

$$\frac{A \cdot B}{B \quad A}$$

Aceasta se poate citi „în presupunerea lui $A \cdot B$ este valabil $B \cdot A$".

Ex. (2).

$\frac{A\ (B \quad C)}{AB \quad AC}$ (regula distributivității disjuncției).

Ex. (3).

$\frac{A\ (B \vee C)}{AB \vee AC}$ (regula distributivității conjuncției).

Trebuie să avem grijă ca semnul „—" să nu fie confundat cu negația. Pentru aceasta îl prelungim puțin în afara formulei sau îl înlocuim cu $\vdash$ și scriem astfel: $A \cdot B \vdash B \cdot A$

Evident că rămîn în vigoare și toate legile privitoare la conjuncție.

Pentru a putea opera traduceri din limbajul booleean în cel al lui Jegalkin și invers sînt necesare următoarele trei definiții:

Df. 24 $\bar{p} = W + p$

Df. 25 $p \vee q = p + q + p\,q$ și Df. 21 de mai sus, adică

$$p + q = \bar{p}\,q \vee p\,\bar{q}$$

Exercițiu

Să se traducă expresia (1) $\overline{p \vee \bar{q}}$ în L_J

Traducerea se face conform cu Df. 21, 24, 25, după cum urmează.

Se traduc expresiile în ordinea crescătoare.

a) Traducem expresia $\bar{q}$ și obținem

$$W + q$$

b) Înlocuim în expresia (1) pe $\bar{q}$ cu $W + q$ și obținem o expresie intermediară

(2) $$\overline{p \vee (W + q)}$$

c) Traducem expresia disjunctivă, adică pe $p \vee (W + q)$ și obținem:

$$p + (W + q) + p\,(W + q)$$

d) Înlocuind în (2) expresia $p \vee (W + q)$ cu traducerea ei obținem o nouă expresie intermediară:

(3) $$\overline{p + (W + q) + p\,(W + q)}$$

e) Traducînd și expresia negativă obținem rezultatul final:

(4) $$W + p + (W + q) + p\,(W + q)$$

Expresia (4) este traducerea *completă* a expresiei (1)*.

---

* Jegalkin nu folosește semnul „W", ci cifra „1" De întrebuințarea cifrelor se leagă anumite probleme pe care le vom discuta la timpul cuvenit.

§ 13. LOGICA OPERATORULUI LUI SHEFFER

Dacă considerăm operatorul „/" de bază şi ceilalţi operatori ca derivaţi, atunci vom obţine un nou limbaj logic.

Traducerea expresiilor formate cu ajutorul celorlalţi operatori se face pe baza definiţiilor:

Df. 26. $\bar{p} = p \mid p$

Df. 27. $p \vee q = (p \mid p) \mid (q \mid q)$

Df. 28. $p \cdot q = (p \mid q) \mid (p \mid q)$

Df. 29. $p \rightarrow q = p \mid (q \mid q)$

Df. 30. $p + q = [p \mid (q \mid q)] \mid [q \mid (p \mid p)]$

Df. 31. $(p = q) = \{[p \mid (q \mid q)] \mid [q \mid (p \mid p)]\} \mid \{[p \mid (q \mid q)] \mid [q \mid (p \mid p)]\}$

Exerciţiu

Să se traducă în limbajul lui Sheffer expresiile $\overline{\bar{p} \cdot q}$, $(p \vee q) \rightarrow r$, $\overline{p \vee q}$

a) Conform cu Df. 26 şi Df. 28, expresia $\overline{\bar{p} \cdot q}$ devine:

$$\{[(p \mid p) \mid q] \mid [(p \mid p) \mid q]\} \mid \{[(p \mid p) \mid q] \mid [(p \mid p) \mid q]\}$$

b) Conform cu Df. 27 şi Df. 29 expresia $(p \vee q) \rightarrow r$ devine:

$$[(p \mid p) \mid (q \mid q)] \mid (r \mid r)$$

c) Conform cu Df. 26 şi Df. 27 expresia $\overline{p \vee q}$ devine:

$$[(p \mid p) \mid (q \mid q)] \mid [(p \mid p) \mid (q \mid q)]$$

§ 14. LOGICA GENERALĂ A PROPOZIŢIILOR

Pentru studiul logicii propoziţiilor este mai important să construim un sistem în care să intre toţi operatorii.

În acest caz Df. 20—31 vor fi de asemenea tratate ca legi, iar traducerile operate cu ajutorul lor vor fi socotite pur şi simplu transformări logice sau calcul logic.

Pe lîngă legile indicate mai sus indicăm încă un grup de legi mai importante.

În expresiile acestor legi intervine, în majoritatea cazurilor, operatorul implicației.

27. $p \to p$ (reflexivitatea implicației).

28. $[(p \to q) \cdot (q \to r)] \to (p \to r)$ (tranzitivitatea).

29. $p \to (q \to p)$ (adevărul urmează din orice).

30. $\bar{p} \to (p \to q)$ (falsul implică orice).

31. $p \to q = \bar{q} \to \bar{p}$ (contrapoziția).

32. $(p \to \bar{p}) \to \bar{p}$

33. $[(p \to q) \cdot (p \to \bar{q})] \to \bar{p}$

} legile reducerii la absurd.

34. $(\bar{p} \to p) \to p$ (legea lui Clavius).

35. $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$ (legea distributivității implicației).

36. $\bar{\bar{p}} \to p$ (legea dublei negații).

37. $(p \cdot q) \to p$

38. $(p \cdot q) \to q$

39. $(p \to q) \to [(p \to r) \to (p \to (q \cdot r))]$

40. $p \to (p \vee q)$

41. $q \to (p \vee q)$

42. $(p \to r) \to [(q \to r) \to ((p \vee q) \to r)]$

43. $p = [(p \to q) \to p]$

44. $p \to q = [p \to (p \to q)]$

45. $p \to [q \to (p \cdot q)]$

} Legile reductibilității.

46. $[p \cdot (p \to q)] \to q$ (*modus ponens*)

47. $[p \to (q \to r)] \to [(p \cdot q) \to r]$ (legea importației-exportației).

48. $p = \bar{\bar{p}}$

49. $[(p = q) \cdot (q = r)] \to (p = r)$

50. $[p \to (q = r)] = [(p \to q) = (p \to r)]$.

51. $(p = q) = (\bar{q} = \bar{p})$

52. $p = p$ (legea identității).

Exerciții de transformare

1. Să se aplice regula $\frac{A\,(B \cdot C)}{AB \quad AC}$ la expresia

$$(p \cdot q) \vee [(p \vee r) \cdot q]$$

Rezolvare

$$(p \cdot q) \vee [(p \vee r) \cdot q]$$
$$[(p \cdot q) \vee (p \vee r)] \cdot [(p \cdot q) \vee q]$$
$$\{[(p \vee r) \vee p] \quad [(p \vee r) \vee q]\} \quad [(p \vee q) \cdot (q \vee q)]$$

Linia de trecere („______") este suprimată și scriem formulele una sub alta.

2. Să se aplice regula $\frac{A\,(B \vee C)}{AB \vee AC}$

la expresia

$$(p \rightarrow q) \cdot [p \vee (q \cdot r)]$$

Rezolvare

$$(p \rightarrow q) \quad [p \vee (q \cdot r)]$$
$$[(p \rightarrow q) \cdot p] \vee [(p \rightarrow q) \quad (q \cdot r)]$$

3. Să se aplice regula $\frac{\overline{A \quad B}}{\bar{A} \vee \bar{B}}$

a expresia

$$\overline{(p \vee q) \cdot r}$$

Rezolvare

$$(p \vee q) \cdot r$$
$$\overline{p \vee q} \vee \bar{r}$$

§ 15. PROBLEMELE LOGICII PROPOZIȚIILOR

Scopul teoretic ultim al logicii este *problema adevărului*. Cum de astă dată obiectul de cercetare este constituit din chiar „raporturile logice dintre propoziții" va trebui să vorbim despre desprinderea de „adevăruri logice" Adevărurile logice sînt de astă dată înseși *legile logice*.

În general este vorba de a rezolva diferite probleme care într-un fel sau altul sînt legate de *adevărul expresiilor*.

În lucrarea de față ne vom ocupa cu următoarele tipuri de probleme:

1. problema deciziei,
2. problema echivalenței a două sau mai multe expresii date,
3. aflarea tuturor concluziilor care pot fi scoase din anumite premise (ipoteze) și invers, aflarea tuturor premiselor (ipotezelor) din care se deduc anumite concluzii,
4. aflarea celei mai economice expresii pentru o funcție dată (formele normale minime).

Formularea problemei deciziei este următoarea: fiind dată o funcție logică φ să se determine dacă este identic adevărată (lege logică), identic falsă (contradicție) sau pur și simplu realizabilă.

Df. 32. Spunem că o funcție logică este realizabilă dacă există cel puțin o alegere pentru care această funcție este adevărată.

Pentru rezolvarea tuturor acestor probleme Dff. 5—11 (§ 6) vor fi absolut indispensabile, totuși pentru fiecare tip de probleme în parte vor fi date pe lîngă aceste definiții și pe baza lor o serie de procedee specifice.

Ce numim „rezolvare"?

Df. 33. O problemă se numește „rezolvată în genere" dacă și numai dacă este dat un procedeu de rezolvare.

Df. 34. O problemă se numește „efectiv rezolvată" dacă după aplicarea procedeului la datele problemei se construiește în calcul o expresie determinată pentru soluția acestei probleme.

Procedeul de rezolvare se mai numește și *algoritm*.

Df. 35. Un algoritm este orice sistem finit și bine determinat de reguli care prin aplicarea la datele problemei duce după un proces finit (după un număr limitat de pași) la rezolvarea problemei puse. În cele ce urmează cea mai mare parte a studiului va fi acordată tocmai studiului procedeelor de rezolvare (algoritmilor) și în special așa-numitelor „forme normale"

§ 16. PROCEDEUL MATRICEAL

Pentru rezolvarea problemei deciziei în cazul funcțiilor cu cel mult trei argumente este comod să folosim un procedeu simplu numit „procedeul matriceal".

Acest procedeu constă în aceea că pentru funcţia considerată se construieşte matricea corespunzătoare şi se constată după seria valorilor ei dacă este lege logică, funcţie contradictorie sau funcţie realizabilă.

Ex. 1. Se dă funcţia φ_1 definită astfel:

$$\varphi_1 = (p \cdot q) \rightarrow (q \cdot p)$$

Să se decidă cu ajutorul matricei asupra acestei funcţii.

Se construieşte matricea acestei funcţii după regulile cunoscute.

Se are în vedere însă că rezolvarea începe de la ord_1 spre ord_2, ord_3 ... ord_n.

p/q	$p \cdot q$	$q \cdot p$	φ_1
W W	W	W	W
W F	F	F	W
F W	F	F	W
F F	F	F	W

Deoarece valoarea funcţiei este totdeauna W, vom spune că φ_1 este lege logică. Rezolvarea fiecărei funcţii în parte se face conform cu valorile argumentelor ei care sînt totdeauna funcţii de ordin inferior funcţiei date şi conform cu definiţia funcţiei respective.

Pentru a face economie de scris în ultima coloană în care trebuie să fie pusă funcţia, punem numele ei (ex. φ_1).

Ex. 2. Fie $\varphi_2 = (p \vee q) = \bar{r}$. Să se determine valoarea ei.

$p\ q\ r$	$p \vee q$	$\bar{r}$	φ_2
W W W	W	F	F
W W F	W	W	W
W F W	W	F	F
W F F	W	W	W
F W W	W	F	F
F W F	W	W	W
F F W	F	F	W
F F F	F	W	F

Funcţia φ_2 cu seria de valori ($F\ W\ F\ W\ F\ W\ W\ F$) nu este identic adevărată, dar nici identic falsă, ea este doar realizabilă.

Ex. 3. $\varphi_3 = (p \cdot q) + (q \cdot p)$

$p\ q$	$p\ q$	$q \cdot p$	φ_3
W W	W	W	F
W F	F	F	F
F W	F	F	F
F F	F	F	F

φ_3 este o funcţie identic-falsă sau o contradicţie.

§ 17. FORMELE NORMALE

Studiind problema deciziei, am văzut că unul din procedeele de rezolvare a acestei probleme este calculul matriceal. Acest procedeu este extrem de simplu şi se aplică aproape automat, totuşi el devine greoi şi chiar impracticabil atunci cînd este vorba de funcţii cu un număr de argumente $n > 3$.

Pentru a rezolva problema deciziei în cazul în care avem un număr $n > 3$ de argumente, ne folosim de procedeul transformărilor echivalente şi în caz particular de aşa-numitul procedeu al formelor normale.

O funcţie oarecare poate căpăta un număr nelimitat de expresii în calculul nostru, expresii care, întrucît reprezintă aceeaşi funcţie sînt echivalente. Pe de altă parte fiind dată o expresie oarecare a unei funcţii (de ordin mai mare ca 1) noi putem găsi cu ajutorul regulilor logice o altă expresie a aceleiaşi funcţii.

În afară de aceasta noi putem spune cîte ceva despre funcţia dată folosind anumite proprietăţi structurale ale anumitor expresii ale acestei funcţii.

De exemplu, din anumite proprietăţi structurale ale unei anumite reprezentări a unei funcţii noi putem spune dacă funcţia dată este identic-adevărată sau nu.

În general vorbind, din anumite proprietăţi structurale ale unei expresii, noi putem conchide la alte proprietăţi.

Se impune desigur ca proprietatea dată să fie univoc reprezentată de proprietăţile structurale ale expresiei la care am ajuns prin transformări.

Asemenea expresii care au anumite proprietăţi structurale din care noi putem conchide existenţa altor proprietăţi pentru expresia dată şi pentru orice altă expresie echivalentă cu ea se numesc expresii tip, „canonice" sau „normale".

Dacă în aritmetică se cere ca din şirul de fracţii

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{8}{24} =$$

să se aleagă fracţia care va reprezenta univoc pe oricare din mulţimea fracţiilor considerate, atunci noi va trebui să găsim o asemenea fracţie care are o anumită proprietate ce nu mai aparţine niciunei alte fracţii din mulţimea considerată.

O astfel de fracţie este aceea care are proprietatea de a fi „ireductibilă", în cazul nostru fracţia $\frac{1}{3}$.

În acest fel dacă fracţia $\frac{a}{b}$ este *ireductibilă* noi putem conchide că ea *reprezintă univoc* toate fracţiile din mulţimea considerată.

În logică pentru a rezolva probleme asemănătoare ne folosim de aşa-numitele „forme normale".

În scopul de a defini formele normale vom introduce un şir de concepte ajutătoare.

Df. 35. Numim *functor principal* al unei expresii functorul cu ordinul cel mai înalt din expresia dată.

Ex. Functorul principal al expresiei

$$(p \rightarrow q) \ \& \ (q \rightarrow r)$$

este „&", iar al expresiei

$$[(p \ \& \ q) \rightarrow r] \vee s$$

este „$\vee$"

Df. 36. Numim *termeni primi* variabilele şi negaţiile lor, sau altfel spus funcţiile de ordinul 1 şi negaţiile lor.

Ex. p, $\bar{p}$, q, $\bar{q}$,

sînt *termeni primi*.

Df. 37. Numim *conjuncţii elementare* următoarele categorii de expresii:

a) semnificaţia *W*,

b) oricare din termenii primi,

c) orice conjuncţie a termenilor primi în care literele nu se repetă,

d) orice conjuncţie de termeni primi cu *W* sau *F* în care literele nu se repetă:

Ex. $p, q, r,$

$\bar{p}, \bar{q}, \bar{r},$

$p \cdot W, p \cdot F,$

$\bar{p} \cdot W, \bar{p} \cdot F,$

$p \cdot q, p \cdot r,$

$\bar{p} \cdot q, \bar{p} \cdot r,$

$\bar{p} \cdot \bar{q}, \bar{q} \cdot \bar{r},$

sînt conjuncţii elementare.

Df. 38. Numim *disjuncţii elementare* următoarele categorii de expresii:

a) semnificaţia *F*,

b) oricare din termenii primi,

c) orice disjuncţie a termenilor primi în care literele nu se repetă,

d) orice disjuncţie între termenii primi cu *W* sau *F*.

Ex. p, q, r

$\bar{p}, \bar{q}, \bar{r},$

$p \vee W, p \vee F,$

$\bar{p} \vee W, \bar{p} \vee F,$

$\bar{p} \vee q, \bar{p} \vee r,$

$\bar{p} \vee \bar{q}, \bar{q} \vee \bar{r}$

sînt disjuncţii elementare.

Df. 39. Numim *funcţie subordonată* o funcţie *f* care se obţine prin descompunerea unei funcţii date. Expresia corespunzătoare va fi numită de asemenea subordonată.

Ex. $p, q, p \cdot q$ sînt funcţii subordonate ale funcţiei:

$$(p \cdot q) \rightarrow p$$

Df. 40. Numim *membru* al unei expresii date orice expresie subordonată în care se descompune o expresie dată prin suprimarea functorului principal.

Ex. Membrii expresiei $p \rightarrow (q \cdot r)$ sînt expresiile p şi $q \cdot r$, iar membrii expresiei $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ sînt expresiile $(p \rightarrow q)$ şi r.

Observăm că în această expresie functorul „$\rightarrow$" din membrul $p \rightarrow q$ deşi este identic ca formă cu functorul principal, el nu este totuşi principal, deoarece este cu un ordin inferior acestuia. După cîte se vede unul şi acelaşi functor poate să fie de diferite ordine, depinde de locul pe care-l ocupă în expresie.

Df. 41. Numim *formă normală* a unei funcţii logice date o asemenea expresie booleeană a funcţiei care satisface următoarele condiţii:

a) are ca functor principal unul dintre functorii &, V, sau niciunul;

b) functorul principal nu apare în expresiile subordonate;

c) negaţia cade numai pe variabile.

În mod corect vom spune sau că „funcţia dată se află în forma normală" sau că „expresia dată este o formă normală".

Df. 42. Numim *formă normală conjunctivă* acea f.n. în care functorul principal este conjuncţia (&).

Df. 43. Numim *formă normală disjunctivă* acea f.n. în care functorul principal este disjuncţia ($\vee$) *.

Ex. expresia $(p \vee q) \cdot (q \vee r)$ este f.n. conjunctivă, iar expresia $(p \cdot q) \vee (q \cdot r)$ este f.n. disjunctivă.

Acestea sînt cazuri triviale de formă normală.

Expresiile $W, F, p, q, r, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ sînt atît forme normale disjunctive, cît şi conjunctive. Interpretarea lor într-un fel sau altul depinde de sistemul de consideraţii de la care pornim.

Expresiile $(p \cdot q) \vee r$, $p \cdot q$, $p \vee q$, ... sînt de asemenea forme normale.

Funcţia $(p \cdot q) \vee r$ este în f.n.d., iar funcţiile $p \cdot q$, $p \vee q$ pot fi socotite într-un fel sau altul.

Dacă expresia $p \cdot q$ e considerată ca un întreg, ceea ce putem scrie astfel $(p \cdot q)$ atunci ea este o f.n.d., dacă dimpotrivă ea este luată ca o expresie compusă atunci avem o f.n.c.

Expresiile $p, q, r, \ldots$

$\bar{p}, \bar{q}, \bar{r},$

constituie *limita comună* a celor două forme normale.

* Pentru comoditate putem scrie în loc de formă normală — f.n., iar în loc de formă normală conjunctivă şi disjunctivă, respectiv f.n.c. şi f.n.d.

Expresiile $p \cdot q$, $\bar{p} \cdot q$, $\bar{p} \cdot \bar{q}$, ... sînt *limite* ale f.n.d., iar expresiile $p \vee q$, $\bar{p} \vee q$, ... sînt limite de f.n.c.

Există și alte definiții ale formelor normale, definiții care se bazează pe conceptul de conjuncție (respectiv disjuncție) elementară.

Df. 44. Numim *formă normală conjunctivă* conjuncția oricărei mulțimi de *disjuncții elementare*.

Df. 45. Numim formă normală disjunctivă disjuncția oricărei mulțimi de *conjuncții elementare*.

Am văzut că printre f.n. netriviale apar și semnele celor două valori W, F.

W este considerat ca o f.n.c. a unei funcții cu o mulțime vidă de argumente sau ca o f.n.d. cu un singur membru (W).

F este considerat ca o f.n.d. a unei funcții cu o mulțime vidă de argumente sau ca o f.n.c. cu un singur membru (F).

§ 18. FORMELE NORMALE ȘI PROBLEMA DECIZIEI

Pentru a decide asupra valorii unei funcții cu ajutorul formelor normale avem două criterii:

1. Vom spune că o funcție este identic adevărată dacă în fiecare membru al formei ei normale conjunctive este conținută cel puțin o expresie de forma $A \vee \bar{A}$.

2. Vom spune că o funcție este identic falsă, dacă în fiecare membru al formei ei normale disjunctive este conținută cel puțin o expresie de forma $A \cdot \bar{A}$.

Pentru a aduce o funcție în f.n. ne folosim de următorul algoritm:

a) se elimină functorii care nu apar în formele normale cu ajutorul definițiilor corespunzătoare,

b) se coboară negația pe variabile,

c) cu ajutorul legilor distributivității și asociativității se stabilește functorul principal dorit.

Procesul de aflare a formei normale a unei funcții va mai fi numit și „normalizare"

Exerciții

1. *Să se normalizeze expresia*:

a) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

și să se decidă asupra valorii ei.

În primul rînd eliminăm semnul „→" printr-o dublă aplicare a regulii $\frac{A \rightarrow B}{\bar{A} \vee B}$ și obținem:

b) $\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee r$

Coborîm negația pe variabile conform cu regula:

$\frac{\overline{A \vee B}}{\bar{A} \;\; \bar{B}}$ (regula lui de Morgan) și obținem:

c) $(\bar{\bar{p}} \cdot \bar{q}) \vee r$

Suprimăm dubla negație conform cu regula:

$$\frac{\bar{\bar{A}}}{A}$$ și obținem:

d) $(p \cdot \bar{q}) \vee r$

Expresia *d)* este o f.n.d. Deoarece ea nu conține în fiecare membru o expresie de forma $A \cdot \bar{A}$, nu este identic falsă. Pentru a obține f.n.c. operăm în continuare asupra expresiei *d*) conform cu regula

$$\frac{A\,(B \cdot C)}{AB \;\; AC}$$ și se obține:

e) $pr \cdot \bar{q}r$, ceea ce și reprezintă f.n.c. Deoarece expresia *e)* nu conține în fiecare membru o expresie de forma $A \vee \bar{A}$, ea nu este identic-adevărată.

Expresia a) fiind echivalentă cu d) și e) deci

a) = *d)* = *e)* ea

nu este nici identic-adevărată, nici identic-falsă, ea este doar realizabilă.

2. *Să se normalizeze expresia*:

a) $p \rightarrow q$

Eliminăm semnul „→" și obținem:

b) $\bar{p} \vee q$

Aceasta este f.n.d., dar ea poate fi tratată și ca f.n.c. cu un singur membru sau cu restul membrilor formați din mulțimi vide de argumente, ceea ce vom nota prin „——" astfel:

c) $(\bar{p} \vee q) \cdot$ ——

Se observă că o singură expresie nu schimbă valoarea lui c) și nu mărește numărul de argumente; anume W:

d) $(\bar{p} \vee q) \cdot W$

Dacă presupunem că și membrul din dreapta este vid, obținem:

e) ——— $\cdot\ W$ sau

f) $W \cdot W$, ceea ce se reduce la W și înseamnă expresia unei funcții cu o mulțime vidă de argumente.

3. *Să se normalizeze expresia:*

a) $\overline{p \vee q}$

Se coboară negația pe variabile și obținem:

b) $\bar{p} \cdot \bar{q}$

Expresia *b*) este atît o f.n.c. cît și o f.n.d. cu un singur membru sau cu restul membrilor vizi, ceea ce putem scrie:

c) $(\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee$ ———

Se observă că o singură expresie pusă în locul lui „———" nu mărește numărul de argumente și nu schimbă valoarea funcției, anume F:

d) $(\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee F$

Presupunînd că și primul membru este vid, obținem:

e) ——— $\vee\ F$ sau

f) $F \vee F$, ceea ce se reduce la F și înseamnă o funcție cu o mulțime vidă de argumente.

Exemplele 2) și 3) justifică introducerea lui W și F printre expresiile elementare (conjuncție și respectiv disjuncție).

4. *Să se normalizeze expresia:*

a) $[(p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

Printr-o aplicare repetată a regulii $\dfrac{A \rightarrow B}{\bar{A} \vee B}$ eliminăm semnul „$\rightarrow$" și obținem:

b) $\overline{(\bar{p} \vee q) \quad (\bar{q} \vee r)} \vee (\bar{p} \vee r)$

Coborîm negația și obținem:

c) $[\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee \overline{(\bar{q} \vee r)}] \vee (\bar{p} \vee r)$

Coborîm negația pe variabile:

$d)\ [(\bar{\bar{p}} \cdot \bar{q}) \vee (\bar{\bar{q}} \cdot \bar{r})] \vee (\bar{p} \vee r)$

Suprimăm dubla negație

$e)\ [(p \cdot \bar{q}) \vee (q \cdot \bar{r})] \vee (\bar{p} \vee r)$

Suprimăm parantezele și semnul „.":

$f)\ p\bar{q} \vee q\bar{r} \vee \bar{p} \vee r.$

Expresia f) este o f.n.d. Deoarece nu conține în fiecare membru o formulă de forma $A \cdot \bar{A}$ ea nu este expresie identic-falsă.

Pentru a obține o f.n.c. pornim de la expresia e) în interiorul căreia operăm o distribuire și obținem:

$g)\ [(p \cdot \bar{q}) \vee q]\quad [(p \cdot \bar{q}) \vee \bar{r}] \vee \bar{p} \vee r$

Operăm din nou distribuția și suprimăm semnul „$\vee$":

$h)\ [pq \cdot q\bar{q} \cdot p\bar{r} \cdot \bar{q}\bar{r}] \vee \bar{p}r$

Distribuim disjuncția față de conjuncție și obținem rezultatul final:

$i)\ pq\bar{p}r \cdot q\bar{q}\bar{p}r \cdot p\bar{r}\bar{p}r \cdot \bar{q}\bar{r}\bar{p}r$

ceea ce este f.n.c.

Se observă că în fiecare membru al expresiei *i*) se conține o formulă de tipul $A \vee \bar{A}$, respectiv: $p\,\bar{p},\ q\bar{q},\ p\,\bar{p},\ r\,\bar{r}$.

În concluzie expresia *i*) este identic adevărată și deci și echivalenta ei a).

5. *Să se normalizeze expresia*:

a) $\overline{p \to (q \to p)}$

Suprimăm „$\to$" și obținem:

b) $\overline{\bar{p} \vee (\bar{q} \vee p)}$

Coborîm negația de două ori și obținem:

c) $\bar{\bar{p}} \cdot (\bar{\bar{q}} \cdot \bar{p})$

Apoi, prin suprimarea dublei negații și a parantezelor rezultă:

d) $p \cdot q \cdot \bar{p}$

Expresia d) poate fi tratată ca formă n.d. cu un singur membru. Se observă că este identic-falsă deoarece conține

expresia $p \cdot \bar{p}$. În concluzie, formula a) echivalentă cu d) este de asemenea identic-falsă.

§ 19. FORMELE NORMALE ÎN LOGICA LUI JEGALKIN

Expresiile normale în logica lui Jegalkin se numesc „polinoame de formă specială", dar noi vom continua să folosim şi aci termenul de „formă normală" pentru a păstra omogenitatea exprimării.

Df. 46. Se numeşte formă normală în logica lui Jegalkin disjuncţia formată din conjuncţii, astfel că în una şi aceeaşi conjuncţie nici o variabilă nu apare mai mult de o singură dată.

Conjuncţia (elementară) cuprinde aceleaşi cazuri ca şi mai sus.

Expresiile: W, p, $pqr + pq + r + W$ sînt forme normale.

La mulţimea formelor normale trebuie raportat de asemenea şi simbolul impropriu F considerat ca reprezentînd o mulţime vidă de membri.

O expresie se aduce la forma normală printr-un proces analog celui analizat mai sus, folosindu-se bineînţeles regulile corespunzătoare legilor specifice acestei logici (vezi § 13).

Să se aducă la forma normală funcţia:

$$(p + q + W)\ (r + W) + (p + q)\ (p + W).$$

Rezolvare

$$pr + qr + r + p + q + W + p + pq + p + q =$$

$$= pr + qr + pq + p + r + W$$

Problema formelor normale în alte sisteme este ceva mai dificilă şi nu ne vom ocupa de ea aici.

§ 20. FORMELE NORMALE PERFECTE

Pentru a rezolva o serie de alte probleme — dacă două expresii date sînt sau nu echivalente, aflarea tuturor concluziilor ce decurg din premise date şi invers, aflarea tuturor premiselor unei concluzii — este util să facem cunoştinţă cu un tip particular de forme normale numite „forme normale perfecte".

Df. 47. Numim *formă normală perfectă* acea f.n. care satisface următoarele condiții:

a) fiecare membru al formei normale conține fiecare din literele care intră în componența expresiei (cu sau fără negație),

b) nici un termen prim nu poate apărea mai mult de o singură dată în același membru,

c) nici un membru nu poate apărea mai mult de o singură dată,

d) nici o literă nu poate intra într-un membru împreună cu negația sa.

Exemple

Expresia $(p \vee q) \cdot (q \vee p)$ este o f.n.c.p., iar funcția $(p \cdot q) \vee (\bar{q} \cdot p)$ este în f.n.d.p. *

Funcția $(p \vee q) \cdot r$ nu este în f.n.c.p. deoarece nu satisface condiția a).

Expresia $p\, p\, q\, r \vee \bar{p}\, r\, q$ satisface condiția a) dar nu satisface condiția b) deoarece p se repetă în primul membru.

Expresia $p\, q\, r \cdot p\, \bar{q}\, r \cdot p\, q\, r$ satisface condițiile a) și b), dar nu satisface condiția c).

Expresia $p\, q\, r\, \bar{r} \cdot p\, \bar{q}\, r$ satisface condițiile a) — c) dar nu satisface condiția d).

Pentru a aduce o expresie dată la forma normală ne slujim de următorul sistem de reguli (algoritm):

a) se aduce expresia la forma normală dorită,

b) dacă într-un membru lipsește o literă, atunci ea se adaugă folosindu-ne de expresiile:

$\alpha \vee (t \cdot \bar{t})$ (pentru f.n.c.) și

$\alpha \cdot (t \vee \bar{t})$ (pentru f.n.d.), unde α este membrul respectiv, iar t litera care trebuie adăugată.

c) dacă un termen apare mai mult de o dată, atunci el este redus conform cu regulile

$$\frac{A \quad A \ldots A}{A} \text{ și respectiv}$$

$$\frac{A \vee A \vee \ldots \vee A}{A}$$

* Pentru comoditate, vom scrie expresia „forma normală perfectă" prescurtat — f.n.p., indicînd, tot prescurtat, și despre care f.n.p. este vorba.

d) dacă un membru apare mai mult de o dată, atunci el este redus conform cu aceleaşi reguli de mai sus,

e) dacă o literă apare împreună cu negaţia ei într-un membru, atunci tot membrul este eliminat,

Cum justificăm introducerea sau eliminarea unei expresii?

R_7. Este permis să se adauge la o expresie dată o alta sau să se elimine o parte a unei expresii dacă noua expresie nu diferă ca valoare de cea iniţială. Într-adevăr, adăugînd la expresia α expresia $(t \cdot \bar{t})$ prin disjuncţie, deci $\alpha \vee (t \cdot \bar{t})$ valoarea expresiei nu se schimbă, ceea ce se dovedeşte prin demonstrarea tezei corespunzătoare:

$$A \vee (B \cdot \bar{B}) = A$$

Se ştie că

$$B \cdot \bar{B} = F \text{ (legea contradicţiei)},$$

iar $A \vee F = A$ (legea posibilităţii),
deci $A \vee (B \cdot \bar{B}) = A$

La fel pentru $\alpha \cdot (t \vee \bar{t})$ demonstrăm corespunzător pe

$$A \cdot (B \vee \bar{B}) = A$$

Se ştie că $B \vee \bar{B} = W$ (legea terţiului exclus) şi că $A \cdot W = A$ (legea posibilităţii).

Or, înlocuind pe W cu expresia echivalentă $B \vee \bar{B}$, obţinem:

$$A \cdot (B \vee \bar{B}) = A$$

Exerciţii de normalizare perfectă

În exemplele pe care le vom considera, expresiile vor fi deja aduse la forma normală.

1. Să se normalizeze perfect următoarea funcţie:

a) $(p \cdot q) \vee (q \cdot r) \vee p$

Pornim de la definiţia f.n.p. şi urmărim rînd pe rînd dacă condiţiile sînt satisfăcute. Satisfacerea lor se obţine cu ajutorul algoritmului indicat.

Condiţia primă evident nu este satisfăcută, deoarece în membrul $(p \cdot q)$ lipseşte litera r, în membrul $(q \cdot r)$ lipseşte litera p, iar în membrul trei (p) lipseşte atît q cît şi r.

Adăugăm pe rînd literele care lipsesc după regula cunoscută.

b) $[(p \cdot q) \cdot (r \vee \bar{r})] \vee [(q \cdot r) \cdot (p \vee \bar{p})] \vee [p \cdot (q \vee \bar{q})]$

Prin distribuire obținem:

c) $pqr \vee pq\bar{r} \vee qrp \vee qr\bar{p} \vee pq \vee p\bar{q}$

Adăugăm litera *r* în ultimii doi membri:

d) $pqr \vee pq\bar{r} \vee qrp \vee qr\bar{p} \vee [pq \cdot (r \vee \bar{r})] \vee [p\bar{q} \cdot (r \vee \bar{r})]$

e) $pqr \vee pq\bar{r} \vee qrp \vee qr\bar{p} \vee pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r}$*

---

* Studentul Chelcea Septimiu din seminarul de logică matematică, secția psihologie a Facultății de Filozofie, Universitatea București a făcut următoarea remarcă în legătură cu adăugarea termenilor.

La un membru α putem adăuga literele p, q după regulile:

a) se formează toate grupele de p, q luate cu și fără negație:

$p\ q$

$p\ \bar{q}$

$\bar{p}\ q$

$\bar{p}\ \bar{q}$

b) la acestea se adaugă membrul α:

$\alpha\ p\ q$

$\alpha\ p\ \bar{q}$

$\alpha\ \bar{p}\ q$

$\alpha\ \bar{p}\ \bar{q}$

Formulăm această observație în general:

a) se formează 2^n alegeri de afirmații și negații de litere ce trebuie adăugate (n reprezintă numărul acestor litere),

b) se adaugă membrul respectiv α pe lîngă fiecare alegere obținută.

Exemplu

Să se aducă la f.n.c.p. funcția $(p \vee q) \cdot r$

În primul membru lipsește litera r. Vom avea de adăugat pe r și $\bar{r}$, astfel

$p \vee q \vee r$

$p \vee q \vee \bar{r}$

În membrul doi, r, lipsesc literele p, q. Cu ajutorul lor formăm conform cu regula indicată alegerile de afirmații și negații:

$pq,\ p\bar{q},\ \bar{p}q,\ \bar{p}\bar{q}$

Adăugăm pe r la fiecare din această grupă și obținem:

$pqr,\ p\bar{q}r,\ \bar{p}qr,\ \bar{p}\bar{q}r$

Membrii obținuți după adăugarea literelor corespunzătoare sînt legați cu ajutorul functorului principal:

$pqr \cdot pq\bar{r} \cdot pqr \cdot p\bar{q}r \cdot \bar{p}qr \cdot \bar{p}\bar{q}r$. După eliminarea membrului care apare în plus obținem: $pqr \cdot pq\bar{r} \cdot p\bar{q}r \cdot \bar{p}qr \cdot \bar{p}\bar{q}r$, ceea ce este f.n.c.p.

Deoarece dorim ca cititorul să se familiarizeze cu regula distributivității nu vom aplica în continuare acest procedeu.

Condiţia primă este în acest fel satisfăcută. De asemenea este satisfăcută condiţia a doua. Pentru a putea urmări mai uşor dacă este satisfăcută condiţia a treia procedăm la o ordonare alfabetică a literelor în fiecare membru, ceea ce ne este permis pe baza legii comutativităţii conjuncţiei. Operăm reducerile necesare conform cu regula idempotenţei.

$f)\ pqr \vee pq\bar{r} \vee pqr \vee \bar{p}qr \vee pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r}$

Reducerea se aplică la membrii pqr şi $pq\bar{r}$ care se repetă şi obţinem:

$g)\ pqr \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r}$

Aceasta este f.n.d.p. a funcţiei a).

2. Să se normalizeze perfect următoarea expresie:

$a)\ (p \vee r) \cdot q$

Satisfacem condiţia primă şi obţinem:

$b)\ [(p \vee r) \vee (q \quad \bar{q})] \quad \{[q \vee (p \cdot \bar{p})] \vee (r \cdot \bar{r})\}$

ceea ce prin distribuţie dă:

$c)\ prq \cdot pr\bar{q} \cdot \{(qp \cdot q\bar{p}) \vee (r \cdot \bar{r})\}$

$d)\ prq \cdot pr\bar{q} \cdot qpr \cdot qp\bar{r} \cdot q\bar{p}r \cdot q\bar{p}\bar{r}$

Ordonînd literele, obţinem:

$e)\ pqr \cdot p\bar{q}r \cdot pqr \cdot pq\bar{r} \cdot \bar{p}qr \cdot \bar{p}q\bar{r}$

După reducere obţinem:

$f)\ pqr \cdot p\bar{q}r \cdot pq\bar{r} \cdot \bar{p}qr \cdot \bar{p}q\bar{r}$, ceea ce şi este f.n.c.p.

3. Fie două funcţii f_1, f_2 definite astfel:

$$f_1 = (p \cdot q) \rightarrow (q \cdot r)$$
$$f_2 = (p \rightarrow \bar{q}) \vee (q \cdot r)$$

Să se verifice cu ajutorul f.n.p. dacă

$$f_1 = f_2$$

Aducem la f.n.p., să zicem conjunctivă, f_1

$a)\ (p \cdot q) \rightarrow (q \cdot r)$

$b)\ \overline{p \cdot q} \vee (q \cdot r)$

$c)\ \bar{p} \vee \bar{q} \vee (q \cdot r)$

$d)\ \bar{p}\bar{q}q \cdot \bar{p}\bar{q}r$

Membrul $\bar{p}\bar{q}q$ dispare deoarece conţine pe $\bar{q}q$ şi rămîne:

e) $\bar{p}\bar{q}r$ care este f.n.c.p.

Aducem apoi la f.n.c.p. pe f_2:

a) $(p \to \bar{q}) \vee (q \cdot r)$

b) $(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (q \cdot r)$

c) $\bar{p}\bar{q}q \cdot \bar{p}\bar{q}r$

Membrul $\bar{p}\bar{q}q$ se elimină şi rămîne:

d) $\bar{p}\bar{q}r$ care este f.n.c.p. a funcţiei f_2

Deoarece f.n.c.p. $f_1 \equiv$ *f.n.c.p.* f_2, cele două funcţii sînt echivalente şi deci e demonstrat că

$$f_1 = f_2$$

4. Să se afle f.n.c.p. a funcţiei:

a) $p \to (q \to p)$

Efectuînd operaţiile corespunzătoare, obţinem:

b) $\bar{p} \vee \bar{q} \vee p$,

ceea ce este f.n.c.

Deoarece în unicul ei membru $\bar{p}\bar{q}\bar{p}$ apare $\bar{p}p$, tot membrul este eliminat.

În acest fel funcţia *a)* nu are f.n.c.p.

Operăm asupra lui *b)* spre a o aduce la f.n.d.p.

c) $[\bar{p} \cdot (q \vee \bar{q})] \vee [\bar{q} \cdot (p \vee \bar{p})] \vee [p \cdot (q \vee \bar{q})]$

d) $\bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q} \vee \bar{q}p \vee \bar{q}\bar{p} \vee pq \vee p\bar{q}$

e) $\bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q} \vee p\bar{q} \vee \bar{p}\bar{q} \vee pq \vee p\bar{q}$

f) $\bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q} \vee p\bar{q} \vee pq$ ceea ce reprezintă f.n.d.p.

5. Să se afle f.n.d.p. a funcţiei:

a) $\overline{\bar{p} \to (p \to q)}$

Efectuînd operaţiile corespunzătoare, obţinem:

b) $\overline{\bar{\bar{p}} \vee (\bar{p} \vee q)}$

c) $\bar{p} \cdot \overline{(\bar{p} \vee q)}$

d) $\bar{p} \cdot (\bar{\bar{p}} \cdot \bar{q})$

e) $\bar{p} \cdot p \cdot \bar{q}$ ceea ce este f.n.d.

Pentru a obține o f.n. perfectă trebuie să îndeplinim condiția a patra, adică să eliminăm membrul în care apare o expresie de tipul $A \cdot \bar{A}$, or în acest caz unicul membru al funcției noastre dispare.

În concluzie, funcția $\overline{\bar{p} \to (p \to q)}$ nu are f.n.d.p.

Pentru a ajunge apoi la f.n.c.p. operăm asupra expresiei *e)* și obținem:

f) $[\bar{p} \vee (q \cdot \bar{q})] \quad [p \vee (q \cdot \bar{q})] \quad [\bar{q} \vee (p \cdot \bar{p})]$

g) $\bar{p}q \cdot \bar{p}\bar{q} \cdot pq \cdot p\bar{q} \cdot \bar{q}p \cdot \bar{q}\bar{p}$

h) $\bar{p}q \cdot \bar{p}\bar{q} \cdot pq \cdot p\bar{q} \quad p\bar{q} \cdot \bar{p}\bar{q}$

i) $\bar{p}q \cdot \bar{p}\bar{q} \cdot pq \cdot p\bar{q}$, ceea ce și este f.n.c.p.

Se observă că expresia $p \to (q \to p)$ din exercițiul 4. este o lege logică, iar $\overline{\bar{p} \to (p \to q)}$ este negația unei legi logice (contradicția).

În legătură cu aceste două exemple sînt adevărate în genere două propoziții:

a) legile logice nu au formă normală conjunctivă perfectă,

b) contradicțiile logice nu au formă normală disjunctivă perfectă.

§ 21. PROCEDEUL MATRICEAL DE NORMALIZARE PERFECTĂ

Să considerăm funcția

$$[(p \to q) \quad (q \to r)] \to (p \to r),$$

adică legea tranzitivității.

Normalizăm perfect această funcție, ceea ce nu se poate decît disjunctiv. Convenim să scriem expresiile obținute în mod continuu, legîndu-le cu ajutorul echivalenței (=).

$$[(p \to q) \cdot (q \to r)] \to (p \to r) = \overline{(\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{q} \vee r)} \vee (\bar{p} \vee r) =$$
$$= \overline{(\bar{p} \vee q)} \vee \overline{(\bar{q} \vee r)} \vee (\bar{p} \vee r) = (p \cdot \bar{q}) \vee (q \cdot \bar{r}) \vee (\bar{p} \vee r) =$$
$$= p\bar{q} \vee q\bar{r} \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q} \vee rp \vee r\bar{p} = p\bar{q}(r \vee \bar{r}) \vee q\bar{r}(p \vee \bar{p}) \vee$$
$$\vee \bar{p}q(r \vee \bar{r}) \vee \bar{p}\bar{q}(r \vee \bar{r}) \vee rp(q \vee \bar{q}) \vee r\bar{p}(q \vee \bar{q}) = p\bar{q}r \vee$$
$$\vee p\bar{q}\bar{r} \vee q\bar{r}p \vee q\bar{r}\bar{p} \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee rpq \vee rp\bar{q} \vee$$
$$\vee r\bar{p}q \vee r\bar{p}\bar{q} = p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r \vee$$
$$\vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee pqr \vee p\bar{q}r \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r = p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}q\bar{r} \vee$$
$$\vee \bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee pqr$$

Se observă că această f. n.d.p. are opt membri.

Ordonăm în continuare membri acestor funcţii pe verticală, iar în dreapta aşezăm alegerile pentru care aceşti membri au valoarea W.

$p\,q\,r$	$W\,W\,W$
$p\,q\,\bar{r}$	$W\,W\,F$
$p\,\bar{q}\,r$	$W\,F\,W$
$p\,\bar{q}\,\bar{r}$	$W\,F\,F$
$\bar{p}\,q\,r$	$F\,W\,W$
$\bar{p}\,q\,\bar{r}$	$F\,W\,F$
$\bar{p}\,\bar{q}\,r$	$F\,F\,W$
$\bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r}$	$F\,F\,F$

Se vede imediat că între cele două serii de semne se poate stabili o corespondenţă biunivocă. Seriile sînt formate din 2^3 grupe de variabile şi 2^3 grupe de valori.

Aceasta nu este întîmplător, ci corespunde întrutotul cu *definiţia tautologiei care este o funcţie logică adevărată pentru 2^n alegeri, cît şi cu definiţia formelor normale perfecte disjunctive.*

Deosebirea între cele două serii constă în faptul că în dreapta avem grupe de valori, în timp ce în stînga avem grupări de variabile.

Vom stabili această corespondenţă printr-o schemă care poartă numele de schema de adevăr a lui Tarski.

Introducem în primul rînd definiţia falsului prin adevăr pentru a face şi mai evidentă legătura.

Df. 48. $F = \overline{W}$

Schema lui Tarski.

Logicianul polonez A. Tarski a elaborat următoarea schemă a definiţiei adevărului:

1. W („X") $= X$

(unde „X" reprezintă numele propoziţiei, iar X propoziţia).

Dacă în locul lui X punem funcţiile noastre de ord_1,

obținem:

2. W („p“) $= p$ (citește: „propoziția este adevărată dacă și numai dacă e satisfăcută intenția ei“)

și

3. $\overline{W}$ („p“) $= \bar{p}$,

ceea ce înseamnă conform cu Df. 48:

4. F („p“) $= \bar{p}$

Cu alte cuvinte, falsul unei expresii de ord$_0$ este identic cu negarea acelei expresii.

Conform cu schemele 2 și 4, seriile de valori de mai sus pot fi privite ca un mod prescurtat de a scrie expresii de forma W(„X“) și F („X“), adică W și F.

În acest fel putem înlocui pe W cu X și pe F cu $\overline{X}$.

Deoarece funcțiile tautologice și contradictorii cuprind un număr maxim de membri, adică $N = 2^n$, este clar că orice altă funcție nu poate avea decît cîte un număr $n < 2^n$.

O primă problemă. Cîte f.n.p. de un anumit tip există?

Deoarece numai funcțiile „extreme“ nu au pe amîndouă f.n.p. este clar că numărul f.n.p. de un tip va fi:

$$N = 2^{2^n} - 1$$

O altă problemă. Dată fiind corespondența biunivocă dintre situațiile de adevăr și formele normale perfecte, este de presupus că putem găsi aceste forme normale folosindu-ne de această corespondență. Deoarece am analizat această corespondență în cazul normalizării disjunctive, vom verifica procedeul mai sus amintit mai întîi pe acest tip de forme normale perfecte.

În cazul funcției „extreme“ acest lucru este ușor și nu va diferi de cazurile de mai sus.

O dificultate apare pentru $n < 2^n$, deoarece se impune să alegem între situațiile de adevăr, unele trebuind să rămînă nealese.

Procedăm din nou prin comparație. Fie φ_1 o funcție definită astfel:

$$\varphi_1 = (p \vee q) \rightarrow r$$

O aducem la forma normală disjunctivă perfectă:

$$\varphi_1 = \overline{p \vee q} \vee r = (\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee r = [(\bar{p} \cdot \bar{q}) \cdot (r \vee \bar{r})] \vee [r (p \vee \bar{p})] =$$
$$= \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee pr \vee \bar{p}r = \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee pr(q \vee \bar{q}) \vee \bar{p}r(q \vee \bar{q}) =$$
$$= \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee pqr \vee p\bar{q}r \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r = \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee$$
$$\vee pqr \vee p\bar{q}r \vee \bar{p}qr$$

Construim şi matricea funcţiei φ_1

$p\ q\ r$	$p \vee q$	φ_1
W W W	W	W
W W F	W	F
W F W	W	W
W F F	W	F
F W W	W	W
F W F	W	F
F F W	F	W
F F F	F	W

Avem următoarele corespondenţe:

$$p\ q\ r \text{ —— } W\ W\ W \text{ —— } W$$
$$\bar{p}\ \bar{q}\ r \text{ —— } F\ F\ W \text{ —— } W$$
$$\bar{p}\ \bar{q}\ \bar{r} \text{ —— } F\ F\ F \text{ —— } W$$
$$\bar{p}\ q\ r \text{ —— } F\ W\ W \text{ —— } W$$
$$p\ \bar{q}\ r \text{ —— } W\ F\ W \text{ —— } W$$

Corespondenţa se stabileşte între membrii formei n.p. disjunctive şi grupele de valori pentru care funcţia are valoarea *W*.

Pentru a afla f.n.d.p. cu ajutorul matricei vom introduce următorul algoritm:

a) căutăm alegerile pentru care funcţia are valoarea *W*,

b) traducem alegerile conform cu schema lui Tarski, adică operăm o înlocuire după schemele:

$$W\,S\,X \text{ şi}$$
$$F\,S\,\bar{X},$$

unde X şi $\bar{X}$ sînt respectiv funcţii de ord_0 şi negaţiile lor,

c) înlocuirea se face cu acele argumente care se află în dreptul coloanei în care stă valoarea respectivă *W* sau *F*,

d) grupele astfel obţinute se unesc cu ajutorul disjuncţiei.

Ex. 1. Să se afle cu ajutorul matricei f.n.d.p. a funcţiei φ_2

$$\varphi_2 = (p \cdot q) \vee (p \rightarrow q)$$

Construim matricea acestei funcţii:

$p\ q$	$p \cdot q$	$p \to q$	φ_2
W W	W	W	W
W F	F	F	F
F W	F	W	W
F F	F	W	W

Avem corespondenţele:

$$WW \text{ --- } pq$$
$$FW \text{ --- } \bar{p}q$$
$$FF \text{ --- } \bar{p}\bar{q}$$

De unde

$$\varphi_2 = pq \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q}$$

Verificăm cu ajutorul procedeului transformărilor.

$$\varphi_2 = (p \cdot q) \vee (p \to q) = (p \cdot q) \vee (\bar{p} \vee q) =$$
$$= (p \cdot q) \vee [\bar{p} \cdot (q \vee \bar{q})] \vee [q \cdot (p \vee \bar{p})] =$$
$$= pq \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q} \vee pq \vee \bar{p}q = pq \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q}$$

Rezultatul este acelaşi.

O problemă ceva mai dificilă pune normalizarea perfectă conjunctivă cu ajutorul matricelor.

Să aducem la forma normală conjunctivă perfectă funcţia φ_3

$$\varphi_3 = (p \cdot q) \to r = \overline{p \cdot q} \vee r = \bar{p} \vee \bar{q} \vee r$$

Confruntăm rezultatul cu matricea acestei funcţii:

$p\ q\ r$	$p \cdot q$	φ_3
W W W	W	W
W W F	W	F
W F W	F	W
W F F	F	W
F W W	F	W
F W F	F	W
F F W	F	W
F F F	F	W

Există şapte cazuri de adevăr şi un caz de fals. Forma normală are un singur membru $\bar{p}\bar{q}r$, deci nu mai poate fi

vorba de o corespondență biunivocă între cazurile de adevăr și membrii formei normale.

Dimpotrivă, există o *anumită* corespondență între cazul în care expresia este falsă și membrul expresiei

$$W\ W\ F \text{ —— } F \text{ —— } \bar{p}\bar{q}r$$

Prima corespondență stă în faptul că unui membru îi corespunde o și numai o situație de fals.

De o corespondență stabilită prin intermediul *schemei lui Tarski* nu mai poate fi vorba.

Iată corespondențele între termenii primi și valorile de adevăr

$$\begin{matrix} \bar{p} & \bar{q} & r \\ | & | & | \\ W & W & F \end{matrix}$$

Un raport determinant se constată totuși: corespondențele sînt stabilite între funcțiile de calitate inversă, respectiv variabilei pozitive îi corespunde valoarea *F*, iar variabilei negative îi corespunde valoarea *W*

Acesta este cazul general.

Pentru a găsi forma normală conjunctivă perfectă cu ajutorul matricelor, procedăm astfel:

a) alegem cazurile de adevăr pentru care funcția = F,

b) înlocuim fiecare valoare astfel:

$W S \bar{X}$

$F S X$ (unde X este funcția de adevăr de ord_1 care stă în dreptul coloanei din care face parte valoarea),

c) grupurile astfel obținute vor forma membrii formei normale conjunctive.

Ex. $\varphi_4 = [(p \vee q) = r]$

$p\ q\ r$	$p \vee q$	φ_4
W W W	W	W
W W F	W	F
W F W	W	W
W F F	W	F
F W W	W	W
F W F	W	F
F F W	F	F
F F F	F	W

Avem corespondențele:

$$\begin{array}{lllll} p\ q\ r & & & & \\ W\,W\,F & — & F & — & \bar{p}\,\bar{q}\,r \\ W\,F\,F & — & F & — & \bar{p}\,q\,r \\ F\,W\,F & — & F & — & p\,\bar{q}\,r \\ F\,F\,W & — & F & — & p\,q\,\bar{r} \end{array}$$

Deci obținem următoarea f.n.c.p.

$$\bar{p}\,\bar{q}\,r \cdot \bar{p}\,q\,r \cdot p\,\bar{q}\,r \cdot p\,q\,\bar{r}$$

Verificăm prin algoritmul transformărilor

$$\varphi_4 = [(p \vee q) = r] = [(p \vee q) \to r] \cdot [r \to (p \vee q)] =$$
$$= [(\overline{p \vee q}) \vee r] \cdot (\bar{r} \vee p \vee q) = [(\bar{p} \cdot \bar{q}) \vee r] \cdot (\bar{r} \vee p \vee q) =$$
$$= \bar{p}\,r \cdot \bar{q}\,r \cdot \bar{r}\,p\,q = [\bar{p}\,r \vee (q \cdot \bar{q})] \cdot [\bar{q}\,r \vee (p \cdot \bar{p})] \cdot (\bar{r}\,p\,q) =$$
$$= \bar{p}\,q\,r \cdot \bar{p}\,\bar{q}\,r \cdot p\,\bar{q}\,r \cdot \bar{p}\,\bar{q}\,r \cdot p\,q\,\bar{r} = \bar{p}\,q\,r \cdot \bar{p}\,\bar{q}\,r \cdot p\,\bar{q}\,r \cdot p\,q\,\bar{r}$$

Rezultatul este același *.

Procedeul matriceal arată deci în mod direct că tautologiile nu pot avea f.n.c.p. deoarece nu au nici un caz de fals, iar contradicțiile nu au f.n.d.p. deoarece nu există nici un caz de adevăr.

§ 22. PRINCIPIUL DUALITĂȚII

Operațiile & (cu altă notație „•") și $\vee$ se comportă în anumite situații ca operații duale.

---

* Formulăm procedeul fără operația de înlocuire.

a) Avînd o funcție φ, considerăm negativa ei $\bar{\varphi}$. Aceasta va fi adevărată exact în cazurile în care φ este falsă.

b) aflăm prin matrice f.n.d.p. a lui $\bar{\varphi}$,

c) formăm negativa acestei f.n.d.p. conform cu legea lui de Morgan și în felul acesta obținem f.n.c.p. căutată.

Considerăm tot exemplul funcției φ_4 (vezi în pagină).

Funcția φ_4 este falsă pentru cazurile *WWF*, *WFF*, *FWF* și *FFW*

Negația ei va fi adevărată tocmai în aceste cazuri. F.n.d.p. a lui $\bar{\varphi}_4$ va fi

$$p\,q\,\bar{r} \vee p\,\bar{q}\,\bar{r} \vee \bar{p}\,q\,\bar{r} \vee \bar{p}\,\bar{q}\,r$$

iar opusa acesteia va fi:

$\bar{p}\,\bar{q}\,r \cdot \bar{p}\,q\,r \cdot p\,\bar{q}\,r \cdot p\,q\,\bar{r}$, ceea ce este f.n.c.p. a funcției φ_4, căci $\varphi_4 = \bar{\bar{\varphi}}_4$. Același rezultat se obține și pe calea înlocuirii.

Dacă într-o formulă booleeană A (construită cu ajutorul lui &, $\vee$, —) înlocuim pe & cu $\vee$ şi pe $\vee$ cu & obţinem o nouă formulă A * cu proprietăţi structurale asemănătoare cu ale formulei A. Formula A * va fi numită formulă duală cu A.

Ex. formula $(A.B) \vee C$ este duală cu formula $(A \vee B) \cdot C$.

Pe baza dualităţii celor două operaţii se constituie următorul principiu, denumit „principiul dualităţii": fiind date două formule A şi B astfel că are loc:

$$A = B;$$

vom avea de asemenea:

$$A^* = B^*$$

Principiul dualităţii ne permite ca din anumite identităţi logice să deducem altele, fiind în acest fel un procedeu ajutător de obţinere a noi formule identic-adevărate.

Exemple de dualitate.

$A.B = B.A$	$A \vee B = B \vee A$
$(A.B).C = A.(B.C)$	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
$A(B.C) = AB.AC$	$A(B \vee C) = AB \vee AC$
$A.A = A$	$A \vee A = A$
$A.AB = A$	$A \vee AB = A$
$AB.A\bar{B} = A$	$AB \vee A\bar{B} = A$
$AB.AC = A(B.C)$	$AB \vee AC = A(B \vee C)$
$\overline{A.B} = \bar{A} \vee \bar{B}$	$\overline{A \vee B} = \bar{A}.\bar{B}$

Cu ajutorul dualităţii putem forma uşor contradictoria unei formule booleene date. Fiind dată o formulă A, formăm contradictoria ei astfel:

a) se aduce formula A la una din formele ei normale,

b) în forma normală se înlocuieşte semnul & cu V, iar V cu &, şi se schimbă calitatea variabilelor.

Fie formula

$$(A \rightarrow \bar{B}) \vee C$$

Forma ei normală va fi:

$$\bar{A} \vee \bar{B} \vee C$$

iar contradictoria:

$$A \,\&\, B \,\&\, \bar{C}$$

Într-adevăr, să verificăm cu ajutorul matricelor

$A\ B\ C$	$\bar{A} \vee \bar{B} \vee C$	$A \& B \& \bar{C}$
W W W	W	F
W W F	F	W
W F W	W	F
W F F	W	F
F W W	W	F
F W F	W	F
F F W	W	F
F F F	W	F

§ 23. MINIMIZAREA EXPRESIILOR

În § 15 am enumerat printre alte probleme aşa-numita problemă a formelor normale minime.

Aceasta este poate problema cea mai interesantă din punct de vedere tehnic, dar care din păcate în cele mai vestite tratate de logică nu ocupă nici un loc. Tocmai de aceea am hotărît să-i acordăm aci o atenţie deosebită.

Pentru rezolvarea acestei probleme, în anumite cazuri este mai comod să lucrăm cu o anumită interpretare „formală" a calculului propoziţiilor.

A. *Interpretarea „formal-algebrică" a calculului propoziţional*

Introducem următoarea serie de simboluri:

1) p, q, r ... „mărimi variabile",

2) 1, 0, două semnificaţii pe care le pot lua variabilele p, q, r,

3) produsul logic,

4) $\vee$ suma logică,

5) $-$ operaţie complementară,

6) $A, B, C,$ funcţii algebrice,

7) $=$ egalitate.

Interpretarea „algebrică" a fost dată chiar de întemeietorul calculului logic G. Boole. Tocmai de aceea sistemul L_B poartă şi numele de „algebră booleeană".

Vorbim de o simplă interpretare „formală" în cazul în care forma unui sistem S_i este schimbată astfel încît obţinem un sistem S_j care diferă numai *nominal* de S_i. Schimbarea

se produce în simbolică, în denumirile date simbolurilor sau în ambele.

Ex., W, F au fost schimbate corespunzător cu 1 și 0; p, q, r, nu mai sînt variabile în domeniul propozițiilor (sau al valorilor logice), ci în domeniul a două mărimi $\{1, 0\}$; „$\cdot$" nu se mai citește „conjuncție", ci „produs logic"; „$\vee$" se citește „sumă logică" și nu „disjuncție" ș.a.m.d.*

Iată cum arată o matrice în interpretarea *formal algebrică*:

$p\ q$	$p \cdot q$
1 1	1
1 0	0
0 1	0
0 0	0

Legi:

a) $1 \vee p = 1$
b) $0 \vee p = p$
c) $1 \cdot p \quad = p$
d) $0 \cdot p \quad = 0$

Expresiile a) — d) vor fi numite „egalități logice" sau și mai corect „identități ale algebrei logice".

Deoarece pentru identități în algebră folosim semnul „$\equiv$", am putea și aci scrie:

a)' $1 \vee p \equiv 1$
b)' $0 \vee p \equiv p$

În consecință, toată teoria calculului propozițional poate fi exprimată în termenii „algebrei" logice.

Pentru exactitate este de preferat să nu amestecăm cele două terminologii.

Se poate pune întrebarea dacă este nevoie de o dedublare a limbajului din moment ce diferența este nominală între expresiile „logicii" și expresiile „algebrei logice".

* Pentru noi prezintă un interes deosebit doar semnificațiile 1, 0.

Ar fi de ajuns o singură justificare: mărirea posibilităților de exprimare, deci *o mai mare eficiență* a unui limbaj prin raport cu altul.

De exemplu, pentru a exprima legea idempotenței vom folosi următoarele două expresii ale algebrei logice:

1) $p^n = p$ (idempotența produsului) *

2) $np = p$ (idempotența sumei).

Evident, numai cu mijloacele de care am dispus pînă acum nu puteam da o asemenea formă legilor de mai sus. Trebuia să scriem:

$$p \cdot p \cdot p \cdot \quad p = p$$

Această expresie însă e mai greoaie decît forma $p^n = p$

Dar avantajele nu se opresc aci. Am arătat că avem de-a face cu o interpretare „formal-algebrică" Această „algebră" însă este de un anumit tip. În primul rînd este o algebră binară. În al doilea rînd, ea este o algebră binară *doar formal*. Există desigur și unele *intersecții* cu algebra binară *normală*.

Ex. 1) în ambele sînt valabile legile de comutativitate și asociativitate.

2) În ambele este valabilă legea distributivității produsului ș.a.

Dar ele diferă, de exemplu, în următoarele puncte fundamentale:

1) legile $p^n = p$ și $np = p$ sînt valabile în algebra binară normală numai pentru anumite semnificații;

2) legea:

$$a + (b \cdot c) = (a + b)(a + c)$$

nu este valabilă în algebra normală. Tocmai de aceea preferăm să vorbim despre o interpretare „formal-algebrică" și în al doilea rînd de o „intersecție" între cele două tipuri de algebră, intersecție despre care vom discuta mai pe larg la timpul potrivit. Am arătat că avantajele nu se opresc la cele spuse mai sus. Putem să dăm o nouă formă definiției operatorilor și anume forma unor ecuații liniare.

1) $p \cdot q = \min (p, q)$

2) $p \vee q = \max (p, q)$

3) $\bar{p} = 1 - p$

4) $p \rightarrow q = \max (\bar{p}, q)$

---

* În logica lui Boole: $X^n = X$.

Cel mai mare avantaj constă în faptul că putem să folosim o serie de legi ale *sistemelor de numerație în rezolvarea a o serie de probleme de logică.*

Într-adevăr, deoarece în cele ce urmează vom folosi pe larg acest avantaj, considerăm util să dăm cititorului unele elemente de teoria sistemelor de numerație pentru a putea înțelege procedeele pe care le vom aplica în continuare.

B. Sistemele de numerație

Dată fiind importanța sistemelor de numerație pentru rezolvarea unor probleme de logică (în particular problema minimizării), expunem aci unele lucruri elementare.

Problema care ne interesează este aceea a trecerii de la un sistem de numerație la altul (convenim să ne limităm la sisteme care nu au baza $m > 10$, unde m este numărul de cifre admise).

Cum trecem de la S_{10} la S_m $(m < 10)$?

Fie un număr N reprezentat în S_{10}. Traducerea lui N în S_m se face după formulele:

$$(1) \quad \frac{N}{m} = a; r_1, \quad \frac{a}{m} = b; r_2, \ldots, d; r_n$$

unde literele $a, b, \ldots, d$ reprezintă cîturi, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ resturile împărțirii, d fiind în același timp un număr ce nu mai poate fi împărțit în numere întregi. Reprezentarea lui N în S_m va fi:

$$d\, r_n\, r_{n-1} \ldots r_1$$

Ex. Fie $N = 15$ și S_2 (deci $m = 2$), adică sistemul binar.

Traducerea lui 15 se face astfel:

$$\frac{15}{2} = 7; 1, \quad \frac{7}{2} = 3; 1, \quad \frac{3}{2} = 1; 1.$$

Reprezentarea va avea forma:

$$1\ 1\ 1\ 1$$

Cum trecem de la S_m la S_{10}?

Fie un număr în S_m cu reprezentarea

$a\ b\ c\ d\ e\ k$ (unde literele reprezintă seria cifrelor).

Traducerea în S_{10} se face după formula:

(2) $a\,m^{i-1} + b\,m^{i-2} + \ldots + dm + k$, unde i este ordinul cel mai înalt al cifrei date (numărul locului pe care-l ocupă cifra numărînd de la dreapta spre stînga coincide cu ordinul cifrei).

Ex. Fie 101 în S_2. Ordinul i este 3

Aplicînd formula (2), vom obține:

$$(1 \times 2^{3-1}) + (0 \times 2) + 1 = 5$$

Deci numărul reprezentat prin „101" în S_2 va fi „5" în S_{10}

§ 24. FORMELE NORMALE DISJUNCTIVE MINIME

Pentru rezolvarea unor probleme cum este găsirea tuturor ipotezelor unei funcții date sau aflarea celei mai economice scheme a unui sistem de relee și contacte ne folosim de așa-numitele forme normale disjunctive minime ale unei expresii date.

Df. 48. Numim forma normală disjunctivă minimă a unei funcții date o asemenea expresie a acestei funcții care este formă normală disjunctivă cu cel mai mic număr de litere posibil.

Se cere în continuare să găsim procedee de aflare a unei asemenea f.n.d.m.*

Un procedeu simplu ar fi următorul: fiind dată o funcție φ_1 îi aflăm toate f.n.d. din care alegem apoi f.n.d. cu cel mai mic număr de litere. Rezolvarea pe această cale devine însă greoaie sau chiar imposibilă în cazul în care avem un număr mai mare de argumente decît trei.

În acest scop s-au construit diferiți algoritmi. Algoritmii cunoscuți pînă acum cuprind două etape:

1) aflarea așa-numitelor f.n.d. prescurtate,

2) aflarea f.n.d. ireductibile sau reduse din care se aleg f.n.d.m.

De o deosebită importanță pentru construirea acestor algoritmi sînt următoarele legi:

1. $AB \vee A\bar{B} = A$
2. $A \vee AB = A$
3. $(A \vee B) \cdot (A \vee C) = A \vee (B \cdot C)$

---

* F.n.d.m. — formă normală disjunctivă minimă.

Prima lege este legea contopirii prin raport cu A, a doua lege este legea absorbţiei, iar a treia — legea scoaterii termenului comun.

Punctul de plecare în aplicarea algoritmilor f.n.d.m. este f.n.d.p.

La f.n.d.p. aplicăm repetat legile 1) — 3) de mai sus şi obţinem f.n.d. prescurtată.

Fie funcţia:

a) $(p \to q) \to r$

O aducem la f.n.d.p.

b) $\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee r$

c) $(p \cdot \bar{q}) \vee r$ (f.n.d.)

d) $[(p \cdot \bar{q}) \cdot (r \vee \bar{r})] \vee [r \cdot (q \vee \bar{q})]$

e) $\{[(p \cdot \bar{q}) \cdot r] \vee [(p \cdot \bar{q}) \cdot \bar{r}]\} \vee (rq \vee r\bar{q})$

f) $p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee rq(p \vee \bar{p}) \vee r\bar{q}(p \vee \bar{p})$

g) $p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee pqr \vee \bar{p}qr \vee p\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}r$

h) $p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee pqr \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r$ (f.n.d.p.)

Este evident că putem efectua un proces invers de la (h) la (c) prin aplicarea regulilor de simplificare. Reţinem faptul că unul şi acelaşi membru poate participa la mai multe operaţii de simplificare (contopire).

În cazul expresiei (h) este de ajuns să aplicăm legea contopirii. Avem următoarele contopiri:

$$p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} = p\bar{q}$$

$$pqr \vee \bar{p}qr = qr$$

$$p\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}r = \bar{q}r$$

Rezultă:

$$p\bar{q} \vee qr \vee \bar{q}r$$

Regula de contopire se aplică de asemenea ultimelor două grupe de termeni:

$$qr \vee \bar{q}r = r$$

În concluzie obținem:

$p\bar{q} \vee r$, ceea ce este expresia (c)

Ordinea aplicării operațiilor este indicată într-un algoritm cunoscut sub numele de algoritmul lui Quine, după numele inventatorului.

1. Se aduce funcția dată la f.n.d.p.
2. Se aplică operația contopirii incomplete

$$AB \vee A\bar{B} = AB \vee A\bar{B} \vee A$$

3. Se aplică operația absorbției.
4. Forma obținută este f.n.d. prescurtată *.

Găsirea formei normale disjunctive prescurtate înseamnă rezolvarea primei părți a problemei minimizării. Algoritmul lui Quine ne oferă o rezolvare relativ simplă a acestei probleme, totuși pentru funcțiile cu un număr de argumente mai mare acest algoritm devine greoi în aplicare.

Pentru a studia mai îndeaproape procedeele de rezolvare este necesar să facem cunoștință cu o serie de concepte și propoziții care stau la baza acestor procedee.

Df. 49. O funcție g se numește *implicant* ** al unei funcții f dacă pentru orice alegere de valori care dă $g = 1$ obținem de asemenea $f = 1$.

Ex. q este implicant al funcției $p \to q$. Într-adevăr, alegerile (11) și (01) care dau $q = 1$ dau și $p \to q = 1$. Evident, printre implicanții acestei funcții se află însăși funcția $p \to q$. Dimpotrivă p nu este implicant. O funcție f poate avea mai mulți implicanți.

Df. 50. Orice implicant g_i se numește *implicant simplu* al funcției f dacă

a) el este o conjuncție elementară,

b) nici o parte a lui g_i nu este implicant al lui f.

---

* A nu se confunda f.n.d. prescurtată cu f.n.d. p. (perfectă). Pentru aceasta vom scrie cuvîntul „prescurtat" întreg.

** Evident, orice implicant este totuna cu „ipoteza" sau „premisa" funcției date. În acest fel găsirea implicanților înseamnă găsirea premiselor funcției date. Convenim însă să folosim terminologia așa cum a fost ea elaborată de Quine și alți logicieni care au studiat procedeele de minimizare.

Fie funcţia $(p \to q) \to r$ cu implicanţii $p\bar{q}r$, pqr, $p\bar{q}$, r. Numai ultimii doi sînt implicanţi simpli. Primul implicant deşi este o conjuncţie elementară nu satisface condiţia a doua, deoarece o parte a sa, anume $p\bar{q}$, este implicant. Al doilea implicant, pqr, de asemenea nu este simplu deoarece o parte a sa este implicant, anume r.

În ce priveşte funcţiile $p\bar{q}$ şi r ele sînt evident implicanţi simpli (sînt conjuncţii elementare şi nici o parte a lor nu mai este implicant). Într-adevăr, pentru $p\bar{q}$, nici p şi nici $\bar{q}$ nu mai sînt implicanţi, deoarece nu satisfac condiţiile impuse în definiţie.

Df. 51. Numim sistem al implicanţilor (respectiv al implicanţilor simpli) totalitatea implicanţilor (respectiv al implicanţilor simpli) unei funcţii date.

Df. 52. Fiind dată o alegere α pentru care $f = 1$, vom spune că valoarea 1 a funcţiei f este *acoperită* de implicantul g al funcţiei f dacă pentru alegerea α obţinem de asemenea $g = 1$.

Fie de exemplu funcţiile f, g_1, g_2, g_3 cu seria de valori indicată în tabelul de mai jos. (Funcţiile sînt definite prin raport cu aceeaşi mulţime de argumente.)

α	f	g_1	g_2	g_3
1 1	1	1	0	0
1 0	0	0	0	0
0 1	1	0	1	0
0 0	1	0	0	1

Se observă că prima valoare 1 a lui f din seria 1 0 1 1 este acoperită de g_1, deoarece pentru alegerea (1 1) care dă $f = 1$ se obţine de asemenea $g_1 = 1$.

Mai departe, g_2 acoperă a doua unitate, iar g_3 a treia unitate.

Pentru una şi aceeaşi unitate pot fi mai multe acoperiri.

Unităţile funcţiei f, cu seria de valori 1 0 1 1, pot fi acoperite de asemenea de funcţiile g_4, g_5, g_6, respectiv cu seriile de valori 1 0 1 0, 0 0 1 1, 1 0 0 1.

Df. 53. Spunem că sistemul S al implicanţilor unei funcţii f este *complet* dacă şi numai dacă pentru orice unitate din seria de valori a lui f există cel puţin o acoperire în S.

În exemplul de mai sus sistemul S_1 (g_1, g_2, g_3) este complet prin raport cu f. Dimpotrivă, sistemul S_2 (g_1, g_2) nu este complet. Sistemul S_3 $(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)$ este de asemenea complet.

Evident, este complet și sistemul format dintr-un singur implicant dacă acest implicant are seria de valori 1 0 1 1. Un asemenea implicant este însăși funcția f.

Deosebit de importante pentru construirea algoritmului minimizării sînt următoarele trei propoziții:

(1) disjuncția tuturor implicanților care intră într-un sistem S complet este echivalentă cu funcția dată,

(2) sistemul tuturor implicanților simpli este un sistem complet.

(3) disjuncția tuturor implicanților simpli ai funcției coincide cu funcția.

Df. 54. Numim formă normală disjunctivă *prescurtată* a unei funcții date disjuncția tuturor implicanților simpli.

Df. 55. Numim sistem *redus* al implicanților simpli acel sistem care satisface condițiile:

a) este complet,

b) nici o parte a lui nu este sistem complet.

Df. 56. Disjuncția tuturor implicanților unui sistem redus se numește formă normală disjunctivă *redusă* (ireductibilă).

O propoziție foarte importantă este și următoarea:

(4) orice formă normală disjunctivă minimă este o formă normală disjunctivă redusă*.

Df. 49—56 și propozițiile (1) — (4) constituie baza unei serii întregi de algoritmi ai minimizației. Ele ne arată etapele pe care trebuie să le parcurgem în aflarea f.n.d.m.

Procesul de minimizație constă din două etape:

a) găsirea tuturor implicanților simpli ai funcției date,

b) găsirea formelor disjunctive reduse din care se aleg formele normale disjunctive minime.

§ 25. ALGORITMUL LUI Mc. CLUSKEY

Pentru minimizarea (minimizația) expresiilor unei funcții există mai multe procedee din care amintim: procedeul lui Mc. Cluskey, procedeul lui A. Blake, procedeul lui R. J. Nelson, diagramele lui E. W. Veitch ș.a**.

* Ținînd seama de caracterul lucrării am omis demonstrațiile propozițiilor (1) — (4).

** Pe această temă vezi V. M. Glușkov, *Sinteza automatelor cifrice*, Moscova, 1962.

În lucrarea noastră ne vom opri asupra algoritmului lui Mc. Cluskey.

Algoritmul lui Mc. Cluskey reprezintă o dezvoltare a algoritmului lui Quine. Acest algoritm are la bază construirea pentru fiecare constituent de unu a unui număr corespunzător în sistemul zecimal.

Df. 57. Numim constituent de unu orice conjuncţie elementară care intră în componenţa unei forme normale disjunctive perfecte.

Numărul unui constituent de unu se construieşte astfel:

a) alegerile prin raport cu care constituenţii de unu capătă valoarea 1 se consideră ca un număr în sistemul binar,

b) se transcrie acest număr din sistemul binar în sistemul zecimal, obţinînd astfel numărul constituentului.

Fie de ex. constituenţii de unu

$$pqr, \quad p\bar{q}r, \quad p\bar{q}\bar{r}$$

Ei iau valorile 1 respectiv pentru alegerile 111; 101; 100. Socotind această serie de valori ca numere în sistemul binar, ele au următoarele transcrieri în sistemul zecimal:

$$1\ 1\ 1 - 7$$

$$1\ 0\ 1 - 5$$

$$1\ 0\ 0 - 4$$

În acest fel, numerele constituenţilor vor fi:

$$p\ q\ r - 7$$

$$p\ \bar{q}\ r - 5$$

$$p\ \bar{q}\ \bar{r} - 4$$

Df. 58. Numim *indice* al unui număr al constituentului de unu numărul de cifre 1 aflate în transcrierea binară a numărului zecimal dat.

Ex. Numărul 7 are indicele 3 deoarece transcrierea binară 1 1 1 conţine 3 cifre de 1. Numărul 5, adică 1 0 1, are indicele 2, iar 4 indicele 1.

La baza algoritmului lui Mc. Cluskey stau următoarele patru propoziţii.

(1) Două numere x şi y reprezintă doi constituenţi care se contopesc dacă şi numai dacă:

a) numerele diferă unul de altul cu 2^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$),

b) indicii celor două numere diferă cu o unitate,

c) numărul cu indicele mai mare este mai mare decît numărul cu indicele mai mic.

Ex. numerele 5 şi 4 sînt numere a doi constituenţi care se contopesc.

Într-adevăr, cele trei condiţii sînt satisfăcute:

a)' $5 - 4 = 2^0 = 1$

b)' indicele lui 5 este 2, iar indicele lui 4 este 1, deci diferenţa lor este 1,

c)' $5 > 4$.

(2). Dacă P este o mulţime de numere ce desemnează o conjuncţie elementară, această conjuncţie elementară intră în calitate de parte componentă în toţi constituenţii de unu ale căror numere intră în mulţimea P. De exemplu, dacă avem mulţimea (1, 3, 5, 7), conjuncţia elementară desemnată de această mulţime intră în conjuncţiile elementare desemnate de mulţimile (1, 3) şi (5, 7).

(3). Dacă S şi R sînt două mulţimi de numere ce desemnează două conjuncţii elementare, atunci conjuncţia desemnată de R absoarbe conjuncţia desemnată de S, dacă şi numai dacă $S \subset R$ (S e cuprins în R). Astfel conjuncţia elementară desemnată de mulţimea (1, 3, 5, 7) absoarbe conjuncţiile elementare desemnate de mulţimile (1, 3) şi (5, 7). De asemenea conjuncţia elementară desemnată de (1, 3) absoarbe conjuncţiile desemnate de 1 şi 3.

(4). Două conjuncţii elementare A şi B se contopesc între ele dacă:

a) diferenţele lor sînt la fel,

b) cele mai mici numere x şi y din mulţimile P şi Q de numere corespunzătoare sînt numere care se contopesc. Conjuncţiile desemnate de mulţimile (1, 3) şi (5, 7) se contopesc. Într-adevăr ambele au diferenţa 2, căci $3 - 1 = 2$ şi $7 - 5 = 2$ şi cele mai mici numere din cele două mulţimi, respectiv 1 şi 5 sînt numere care se contopesc (vezi propoziţia (1)).

Pe baza acestor patru propoziţii se construieşte următorul algoritm pentru aflarea implicanţilor simpli.

1. Se dau numerele constituenţilor de unu ai f.n.d.p.
2. Se grupează numerele obţinute după indici şi în ordinea crescătoare a indicilor.

3. Se formează grupele de numere care se contopesc; în fiecare grupă numerele se scriu în ordine crescătoare.

4. Dacă grupele obținute se mai contopesc, atunci efectuăm în continuare contopirile.

5. Efectuăm absorbțiile între grupele obținute prin contopire și numerele din care s-au obținut aceste grupe.

6. Mulțimile de numere necontopite sau neabsorbite reprezintă implicanții simpli pe baza cărora se formează f.n.d. prescurtată.

Exemplul 1

Să se găsească implicanții simpli ai funcției:

$$f(p, q, r, s) = \bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r}\,s \vee \bar{p}\,q\,\bar{r}\,s \vee \bar{p}\,\bar{q}\,r\,s \vee p\,\bar{q}\,\bar{r}\,s \vee$$
$$\vee\, p\,\bar{q}\,r\,s \vee \bar{p}\,q\,r\,s \vee p\,q\,r\,s$$

1. Dăm alegerile pentru care constituenții de unu ai acestei funcții au valoarea 1. Scriem apoi numerele și indicii corespunzători:

$\bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r}\,s$ — 0 0 0 1 — 1 — 1

$\bar{p}\,q\,\bar{r}\,s$ — 0 1 0 1 — 5 — 2

$\bar{p}\,\bar{q}\,r\,s$ — 0 0 1 1 — 3 — 2

$p\,\bar{q}\,\bar{r}\,s$ — 1 0 0 1 — 9 — 2

$p\,\bar{q}\,r\,s$ — 1 0 1 1 — 11 — 3

$\bar{p}\,q\,r\,s$ — 0 1 1 1 — 7 — 3

$p\,q\,r\,s$ — 1 1 1 1 — 15 — 4

Grupăm apoi numerele după indici:

1	1
2	5, 3, 9
3	11, 7
4	15

Efectuăm contopirile între grupele învecinate după regulile date.

Se obțin următoarele grupe de contopiri:

a) (1, 5), (1, 3) (1, 9)

b) (5, 7), (3, 11), (3, 7), (9, 11)

c) (11, 15), (7, 15).

Efectuăm absorbţiile. Toate numerele sînt absorbite, ceea ce vom nota cu o steluţă:

1*, 5*, 3*, 9*, 11*, 7*, 15*

Scriem diferenţele pentru fiecare grupă din seriile a)—c), diferenţe pe care le aşezăm alături în paranteză:

a') (1, 5) (4), (1, 3) (2), (1, 9) (8)

b') (5, 7) (2), (3, 11) (8), (3, 7) (4), (9, 11) (2)

c') (11, 15) (4), (7, 15) (8)

Efectuăm contopirile posibile între grupele di seriile învecinate care au aceeaşi diferenţă:

se vede că grupa (1, 5) cu diferenţa 4 se contopeşte cu grupa (3, 7) cu aceeaşi diferenţă, grupa (1, 3) se contopeşte cu grupa (9, 11), amîndouă avînd diferenţa 2 ş.a.m.d. În total obţinem următoarele contopiri:

(1, 5, 3, 7) (4) (3, 11, 7, 15) (8)

(1, 3, 5, 7) (2) (3, 7, 11, 15) (4)

(1, 3, 9, 11) (2)

(1, 9, 3, 11) (8)

Scriem diferenţele în dreptul fiecărei grupe. Diferenţa se formează între numerele cele mai mici ale grupelor contopite.

Astfel, pentru (1, 5) şi (3, 7) avem 3 — 1 = 2.

Vom avea deci:

(1, 5, 3, 7) (4) (2)

(1, 3, 5, 7) (2) (4)

(1, 3, 9, 11) (2) (8)

(1, 9, 3, 11) (8) (2)

(3, 11, 7, 15) (8) (4)

(3, 7, 11, 15) (4) (8)

Scriind peste tot numerele în ordine crescătoare, obținem două cîte două grupe identice. Eliminăm cîte una din ele și obținem:

(1, 3, 5, 7) (2) (4)

(1, 3, 9, 11) (2) (8)

(3, 7, 11, 15) (4) (8)

Efectuăm absorbțiile. Se observă că toate grupele a) — c) sînt absorbite, ceea ce se notează:

(1, 5) (4)* ş. a. m. d.

Cele trei grupe de numere rămase nu mai pot fi supuse contopirii. Ele reprezintă trei implicanți simpli. Scriem implicanții simpli pe baza acestor numere în felul următor.

Formăm conjuncția elementară a unui număr oarecare din mulțimea dată și conjuncțiile corespunzătoare diferențelor. Eliminăm literele indicate de diferențe și obținem implicantul simplu.

Considerăm, de ex., grupa (1, 3, 5, 7) (2) (4)

Scriem de ex., conjuncția corespunzătoare lui 1:

$$1 - 0001 - \bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r}\,s$$

și conjuncțiile corespunzătoare diferențelor:

$$2 - 0010 - \bar{p}\,\bar{q}\,r\,\bar{s}$$

$$4 - 0100 - \bar{p}\,q\,\bar{r}\,\bar{s}$$

Literele care trebuie eliminate din $\bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r}\,s$ sînt respectiv r și q.

Obținem implicantul simplu:

$$\bar{p}\,s$$

Procedăm la fel cu grupa a doua

(1, 3, 9, 11) (2) (8)

$$1 - 0001 - \bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r}\,s$$

$$2 - 0010 - \bar{p}\,\bar{q}\,r\,\bar{s}$$

$$8 - 1000 - p\,\bar{q}\,\bar{r}\,\bar{s}$$

Literele ce trebuie eliminate sînt p și r

Obţinem implicantul simplu:

$$\bar{q}\, s$$

Efectuăm acelaşi proces în legătură cu grupa ultimă (3, 7, 11, 15) (4) (8)

$$3 - 0\,0\,1\,1 - \bar{p}\,\bar{q}\,r\,s$$

$$4 - 0\,1\,0\,0 - \bar{p}\,q\,\bar{r}\,\bar{s}$$

$$8 - 1\,0\,0\,0 - p\,\bar{q}\,\bar{r}\,\bar{s}$$

Eliminăm literele p şi q şi obţinem implicantul simplu

$$r\, s$$

Implicanţii simpli ai expresiei date sînt deci:

$$\bar{p}\, s, \bar{q}\, s, r\, s$$

Aceşti implicanţi formează un sistem complet, iar f.n.d. corespunzătoare este o f.n.d. prescurtată, adică:

$$\bar{p}\, s \vee \bar{q}\, s \vee r\, s$$

Pentru aflarea implicanţilor simpli, această ultimă parte a procesului, care constă în eliminarea anumitor litere, poate fi efectuată mai uşor în felul următor:

a) luăm constituentul corespunzător unui număr din mulţimea dată, de ex. avînd mulţimea (1, 3, 5, 7) cu diferenţele (2) (4); alegem numărul 1; constituentul va fi $\bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r}\,s$,

b) scriem alegerile corespunzătoare diferenţelor, în cazul nostru pentru (2) şi (4) vom obţine respectiv (0 0 1 0) şi (0 1 0 0),

c) scriem una sub alta cele trei expresii: constituentul numărului ales şi alegerile corespunzătoare celor două diferenţe:

$$\bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r}\,s$$

$$0\,0\,1\,0$$

$$0\,1\,0\,0$$

d) eliminăm acele litere care se află în dreptul cifrelor unu din componenţa alegerilor date.

Literele eliminate se taie cu o bară

$$\bar{p}\ \not{q}\ \not{r}\ s$$

0 0 1 0

0 1 0 0

Literele rămase constituie implicantul simplu; în cazul de față:

$$\bar{p}\ s$$

Diferitele momente ale acțiunii algoritmului lui Mc. Cluskey pot fi cuprinse în următoarele tabele 1 și 2.

Tabelul 1

Constituenții	Alegerile care dau 1	Numerele	Indicii
$\bar{p}\ \bar{q}\ \bar{r}\ s$	0 0 0 1	1	1
$\bar{p}\ q\ \bar{r}\ s$	0 1 0 1	5	2
$\bar{p}\ \bar{q}\ r\ s$	0 0 1 1	3	2
$p\ \bar{q}\ \bar{r}\ s$	1 0 0 1	9	2
$p\ \bar{q}\ r\ s$	1 0 1 1	11	3
$\bar{p}\ q\ r\ s$	0 1 1 1	7	3
$p\ q\ r\ s$	1 1 1 1	15	4

Tabelul 2

Indicii	Numerele	Contopirile	Contopirile
1	1*	(1, 5) (4)* (1, 3) (2)*, (1, 9) (8)*	(1, 3, 5, 7) (2) (4) (1, 3, 9, 11) (2) (8)
2	5*, 3*, 9*	(5, 7) (2)*, (3, 11) (8)* (3, 7) (4)*, (9, 11) (2)*	
3	11*,		(3, 7, 11, 15) (4) (4)
4	15*	(11, 15) (4)* (7, 15) (8)*	

O dată ce am găsit f.n.d. prescurtată rămîne să îndeplinim și a doua etapă a minimizării, anume să aflăm f.n.d. ireductibilă (redusă).

Pentru aceasta ne folosim de așa-numitul tabel al implicanților al lui Quine.

Tabelul este constituit astfel:

	a_1	a_2		a_n
g_1				
g_2				
g_n				

unde a_i reprezintă numerele constituenților de unu determinați, iar g_i mulțimile de numere ale implicanților simpli.

Pentru funcția noastră vom avea:

	1	3	5	9	7	11	15
(1, 3, 5, 7)	*	*	*		*		
(1, 3, 9, 11)	*	*		*		*	
(3, 7, 11, 15)		*			*	*	*

Orice implicant se transformă în 1 prin raport cu alegerea al cărei număr e conținut în mulțimea numerelor ce desemnează implicantul respectiv. Notăm cu o steluță acoperirile dintre implicanții simpli și constituenți. De exemplu, mulțimea (1, 3, 5, 7) acoperă numerele corespunzătoare 1,3 , 5, 7 și nu pe 9, 11, 15.

Implicanții simpli cărora le corespund o coloană (= un șir vertical) cu o singură steluță formează *nucleul funcției* și trebuie să intre în orice f.n.d. ireductibilă. În cazul nostru nucleul funcției este constituit din toți cei trei implicanți, deoarece primului implicant îi corespunde coloana lui 5 cu o singură steluță, celui de-al doilea coloana lui 9, iar celui de-al treilea îi corespunde coloana lui 15. Implicanții simpli care intră în forma normală disjunctivă ireductibilă *trebuie să*

acopere pe toți constituenții de 1. În cazul nostru nucleul funcției corespunde cu f.n.d. ireductibilă, iar aceasta cu f.n.d.m., adică:

$$\bar{p}\, s \vee \bar{q}\, s \vee r\, s$$

Exemplul 2

Se dă funcția $f(p, q, r) = (0, 1, 2, 5, 6, 7)$, unde 0, 1, 2, 5, 6, 7 sînt numerele constituenților.

Să se afle forma normală disjunctivă minimă a acestei funcții.

Rezolvare.

În primul rînd căutăm indicii corespunzători acestor numere. Pentru a găsi indicii trebuie să traducem aceste numere în sistemul binar. Vom avea tabelul:

Numere	Alegeri	Indici
0	000	0
1	001	1
2	010	1
5	101	2
6	110	2
7	111	3

Formăm apoi tabelul contopirilor

Indici	Numere	Contopiri
0	0*	(0, 1) (1) (0, 2) (2)
1	1*, 2*	(1, 5) (4) (2, 6) (4)
2	5*, 6*	
3	7*	(5, 7) (2) (6, 7) (1)

Mulţimile de numere care nu se mai contopesc reprezintă implicanţii simpli ai funcţiei date.

Pentru a parcurge a doua etapă a procesului minimizării ne folosim de tabelul lui Quine.

	0	1	2	5	6	7
(0, 1)	*	*				
(0, 2)	*		*			
(1, 5)		*		*		
(2, 6)			*		*	
(5, 7)				*		*
(6, 7)					*	*

Se observă că fiecare constituent are cîte două acoperiri. În acest fel putem forma două grupe diferite de implicanţi simpli şi deci două forme normale disjunctive ireductibile.

Vom avea grupele:

(0, 1) (5, 7) (2, 6)

(0, 2) (1, 5) (6, 7)

Folosind diferenţele acestor grupe de numere aflăm următoarele grupe de implicanţi:

$$\bar{p}\,\bar{q}\,,\ p\,r\,,\ q\,\bar{r}$$

$$\bar{p}\,\bar{r}\,,\ \bar{q}\,r\,,\ p\,q$$

Corespunzător acestor două sisteme de implicanţi avem două f.n.d. ireductibile:

$$f_1 = \bar{p}\,\bar{q} \vee p\,r \vee q\,\bar{r}$$

$$f_2 = \bar{p}\,\bar{r} \vee \bar{q}\,r \vee p\,q$$

Deoarece f_1 şi f_2 au acelaşi număr de litere (cîte 6) avem două f.n.d.m.

Aflarea f.n.c.m. se bazează pe următoarele legi:

$$1)\ AB \cdot A\bar{B} = A$$

$$2)\ AB \cdot A = A$$

$$3)\ AB \vee AC = A\ (B \vee C)$$

Uneori reprezentarea conjunctivă poate fi mai simplă decît cea disjunctivă. Să considerăm f.n.d.m. din exemplul 3 de mai sus:

$$\bar{p}\, r \vee \bar{p}\, s$$

Aplicăm legea 3) și obținem:

$$\bar{p} \cdot (r \vee s)$$

ceea ce este o expresie mai simplă (conține cu cîte o operație și o literă mai puțin). Expresia $\bar{p}\ (r \vee s)$ este în același timp f.n.c.m. a funcției considerate.

Teoria minimizării conjunctive este duală cu teoria minimizării disjunctive. Problema constă în cea mai mare parte în reformularea anumitor teoreme și definiții, altfel spus în *parafrazare.*

Corespunzător noțiunii de „implicant", aici vom introduce noțiunea de „consecvent"

Df. 59. O funcție K se numește *consecvent* al unei funcții f, dacă pentru orice alegere de valori se obține $K = 0$ numai în acele cazuri în care $f = 0$ sau f nu e determinat (vezi Df. 49).

Df. 60. Orice consecvent K se numește *consecvent simplu* al funcției f dacă

a) este o disjuncție elementară,

b) nici o parte a lui K nu este consecvent al lui f.

Df. 61. Spunem că sistemul (totalitatea) consecvenților unei funcții date este complet dacă și numai dacă pentru fiecare valoare 0 a funcției date există cel puțin un consecvent care să acopere această valoare.

Df. 62. Numim f.n.c. prescurtată acea f.n.c. care este formată numai din consecvenți simpli.

Df. 63. Spunem că sistemul complet al consecvenților este ireductibil dacă nici o parte a sa nu mai este completă.

Df. 64. Conjuncția consecvenților simpli ai unui sistem redus formează f.n.c. ireductibilă sau încheiată.

F.n.c.m. se aleg din f.n.c. ireductibile. Pe baza definițiilor date mai sus parafrazăm metodele date pentru minimizarea disjunctivă și obținem procedeele de rezolvare a problemei minimizării conjunctive.

De ex. putem reformula procedeul lui Quine (tabela consecvenților simpli).

§ 27. AFLAREA IPOTEZELOR (PREMISELOR) ȘI CONCLUZIILOR

Această problemă este strîns legată de problema anterioară, dar ea prezintă interes aparte. Dăm două definiții comode pentru ipoteză (premisă) și concluzie.

Df. 65. Spunem că o funcție f_i este ipoteză a unei funcții f_j dacă și numai dacă $f_i = 0$ atunci cînd $f_j = 0$ (sau în general dacă $f_i \to f_j = 1$).

Df. 66. Spunem că o funcție f_j este concluzie din f_i dacă și numai dacă f_j are valoarea 1 atunci cînd f_i are valoarea 1 (sau în general dacă $f_i \to f_j = 1$)*

Pentru a afla toate ipotezele unei funcții date, procedăm astfel:

a) aducem funcția dată la f.n.d.p.,

b) fiecare parte a f.n.d.p. sau transformare echivalentă cu această parte reprezintă o ipoteză pentru funcția dată.

Ex. Să se găsească ipotezele funcției

$$(p \vee q) \to p$$

Aducem această funcție la f.n.d.p.

$$\overline{(p \vee q)} \vee p$$

$$(\bar{p} \quad \bar{q}) \vee p$$

$\bar{p}\,\bar{q} \vee p\,q \vee p\,\bar{q}$ Aceasta este f.n.d.p.

Vor fi ipoteze:

1) $\bar{p}\,\bar{q}$ 4) $p\,q \vee \bar{p}\,\bar{q}$

2) $p\,q$ 5) $p\,q \vee p\,\bar{q}$

3) $p\,\bar{q}$ 6) $p\,\bar{q} \vee \bar{p}\,\bar{q}$

7) însăși funcția în f.n.d.p. și toate transformările echivalente cu formulele 1) — 6).

* Definițiile 65, 66 nu sînt decît o reformulare (în termeni adecvați noii probleme) a definițiilor 49, 59.

Evident, dintre formulele transformate prezintă interes doar „ipotezele simple". Să verificăm cu ajutorul matricei dacă într-adevăr formulele 1) — 6) reprezintă ipoteze pentru funcția noastră.

$p\ q$	$p \cdot q$	$p \cdot \bar{q}$	$\bar{p} \cdot \bar{q}$	$p\,q \vee p\,\bar{q}$	$p\,q \vee \bar{p}\,\bar{q}$	$p\,\bar{q} \vee \bar{p}\,\bar{q}$	$(p \vee q) \rightarrow p$
1 1	1	0	0	1	1	0	1
1 0	0	1	0	1	0	1	1
0 1	0	0	0	0	0	0	0
0 0	0	0	1	0	1	1	1

Este important să observăm numai cazul în care funcția noastră are valoarea 0. Dacă toate celelalte funcții au valoarea 0 cînd $f = 0$, este evident că indiferent ce valori au în rest ele vor fi ipoteze pentru funcția noastră.

Pentru a afla toate concluziile din premise date procedăm în felul următor:

a) legăm între ele premisele date cu ajutorul conjuncției,
b) aducem expresia astfel obținută la f.n.c.p.,
c) orice parte a f.n.c.p. sau o transformare echivalentă ei va fi concluzie din premisele date. Evident, printre ele vor fi netriviale concluziile simple.

Exemplu. Fie funcțiile: $p \cdot q,\ p \vee \bar{q},\ \bar{p} \vee q$
Să se găsească concluziile acestor funcții.

Rezolvare

Formăm conjuncția acestor expresii și aflăm f.n.c.p.
$(p \cdot q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)$. Eliminăm parantezele:

$$p\,q \cdot p\,\bar{q} \cdot \bar{p}\,q$$

F.n.c.p. va fi:

$$p\,q \cdot p\,\bar{q} \cdot \bar{p}\,q$$

Vor fi concluzii:

1) $p\,q$ 4) $p\,q \cdot p\,\bar{q}$
2) $p\,\bar{q}$ 5) $p\,q \cdot \bar{p}\,q$
3) $\bar{p}\,q$ 6) $p\,\bar{q} \cdot \bar{p}\,q$
7) însăși f.n.c.p.: $pq \cdot p\bar{q} \cdot \bar{p}q$

Verificarea cu ajutorul matricelor a faptului că formulele 1) — 6) reprezintă concluzii o propunem cititorului.

Pînă acum am expus logica propoziţiilor ca un sistem bazat pe definiţii. Problemele le-am rezolvat fie nemijlocit cu ajutorul acestor definiţii (procedeul matriceal), fie cu ajutorul unor procedee de calcul întemeiate pe aceste definiţii. Logica propoziţiilor poate primi însă şi o altă organizare care sub raport *teoretic* prezintă un interes special, anume organizarea *axiomatică*.

Un sistem axiomatic constă cel puţin din trei tipuri de propoziţii: axiome, reguli şi teoreme.

Df. 67. Numim *axiomă* o propoziţie a unui sistem teoretic *S*, propoziţie care se bucură de două proprietăţi:

a) nu poate fi dedusă din nici o altă propoziţie a sistemului dat*,

b) din ea se deduc numai propoziţii adevărate ale sistemului.

Df. 68. Numim *regulă* o propoziţie care ne indică modul în care pornind de la o propoziţie *A* putem obţine o nouă propoziţie *B*.

Df. 69. Numim *teoremă* o propoziţie a unui sistem *S* care este dedusă din alte propoziţii ale sistemului *S* cu ajutorul re ulilor.

Într-un sistem axiomatic pot să apară, pe lîngă axiome, reguli şi teoreme, de asemenea şi definiţii.

Regulile pot fi de două feluri — reguli de formare a expresiilor şi reguli de deducţie. Cele două grupe de reguli determină o teorie formalizată. În teorie pot fi cuprinse şi expresii care nu sînt adevărate, dar care totuşi sînt corect formate. Astfel, expresiile A B, $A \vee B$ sînt expresii care nu sînt adevărate, dar sînt corect formate.

Sistemul axiomatic nu este numai un mod de organizare a ştiinţei, ci şi un mijloc de decizie, în cazul logicii un mijloc de separare a legilor logice (teoremelor) din mulţimea expresiilor corect formate în teoria dată.

Din însăşi definirea conceptelor fundamentale ale sistemelor axiomatice decurge că aceste concepte sînt relative şi că prin raport cu una şi aceeaşi teorie putem construi mai multe sisteme axiomatice.

În cele ce urmează nu vom expune în întregime un anumit sistem axiomatic al logicii propoziţiilor, ci vom da cîteva

* Într-un sens mai general, o axiomă este o propoziţie luată ca nedemonstrată în sistemul dat.

exemple de sisteme axiomatice și de deducție în aceste sisteme.

Ideea de a construi logica sub forma unui sistem axiomatic se găsește încă la Aristotel. Silogistica lui Aristotel are la bază o axiomă unică numită „axioma silogismului": *dictum de omni et de nullo*. Din această axiomă pot fi deduse toate modurile silogismului. Pentru a ușura deducția modurilor, Aristotel adaugă anumite reguli specifice fiecărei figuri silogistice. Totuși la Aristotel axiomatica este încă destul de imperfectă. Deducția are mai mult un caracter local și nu se operează pas cu pas din axiomă cu ajutorul regulilor.

Prima formă axiomatică modernă a logicii a fost dată de Frege. De la Frege pînă astăzi sistemele axiomatice s-au înmulțit, printre cele mai cunoscute fiind sistemele lui Russell, Lukasiewicz, Hilbert, Church, Nicod.

1. *Sistemul lui Frege* (S_F).

Sistemul lui Frege constă din 6 axiome și două reguli de deducție.

Ax_1 $p \to (q \to p)$

Ax_2 $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$

Ax_3 $[p \to (q \to r)] \to [q \to (p \to r)]$

Ax_4 $(p \to q) \to (\bar{q} \to \bar{p})$

Ax_5 $\bar{\bar{p}} \leftarrow p$

Ax_6 $p \to \bar{\bar{p}}$

R_1. Regula substituției.

R_2. $\frac{A,\ A \to B}{B}$ (*modus ponens* sau regula separației).

Deoarece în sistemul lui Frege nu apar functori ca &, $\vee$ ș.a., se presupune că ei sînt reductibili la functorii($\to$, —) cu ajutorul „definițiilor de întrebuințare" (*Gebrauchsdefinitionen*). Evident însă că întrucît cu ajutorul functorilor($\to$, —) putem exprima toate teoremele pe care le putem forma cu ajutorul celorlalți functori, introducerea definițiilor de întrebuințare nu e obligatorie.

2. *Sistemul lui Lukasiewicz* ($S_Ł$).

Lukasiewicz a arătat că sistemul lui Frege poate fi înlocuit cu un sistem mai simplu, care are la bază aceiași

functori ($\rightarrow$, $-$). El conține trei scheme de axiome și o singură regulă.

Sch. Ax_1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Sch. Ax_2 $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$

Sch. Ax_3 $(\bar{A} \rightarrow \bar{B}) \rightarrow (B \rightarrow A)$

R. $\dfrac{A, A \rightarrow B}{B}$

Lukasiewicz formulează expresiile cu ajutorul metasimbolurilor $A, B, C, \ldots$ și de aceea el nu vorbește de axiome, ci de „scheme de axiome". Fiecare schemă de axiomă desemnează o mulțime infinită de axiome.

Se vede că schema Ax_1 și schema Ax_2 corespund respectiv cu Ax_1 și Ax_2 din sistemul lui Frege. Ax_3 — Ax_6 sînt înlocuite cu o schemă care n-are corespondent în S_F.

3. *Sistemul lui Russell* (S_R)

B. Russell a construit un sistem cu 5 axiome bazat pe functorii $\vee$, $-$ Ca prescurtare folosește semnul $\rightarrow$.

Df. $p \rightarrow q = \bar{p} \vee q$

Ax_1 $(p \vee p) \rightarrow p$*

Ax_2 $q \rightarrow (p \vee q)$

Ax_3 $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

Ax_4 $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$

Ax_5 $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$

R_1. Regula substituției**.

R_2. *Modus ponens*

4. *Sistemul lui Hilbert* (S_H)

P. Bernays a arătat că Ax_4 a lui Russell este de prisos. D. Hilbert și W. Ackermann au construit un sistem care cuprinde numai axiomele 1, 2, 3, 5 din S_R. În acest

---

* Notăm că Russell nu folosește parantezele, ci puncte. De exemplu, Ax_1 e scrisă astfel: $p \vee p \cdot \rightarrow p$

** Variabilele $p, q, r, \ldots$, pot fi substituite și cu o formulă oarecare din S_R. (La fel pentru S_H, S_C, S_N).

sistem semnul implicației este luat de asemenea numai ca un mod prescurtat de a scrie anumite expresii. Avem deci următorul sistem de axiome:

$$Ax_1 \ \overline{p \vee p} \vee p$$

$$Ax_2 \ \bar{p} \vee (p \vee q)$$

$$Ax_3 \ \overline{p \vee q} \vee q \vee p$$

aici nu e negație!

$$Ax_4 \ \overline{(\bar{p} \vee q)} \vee [\overline{(r \vee p)} \vee (r \vee q)]$$

Introducînd prescurtarea următoare:

$$p \to q = \bar{p} \vee q,$$

axiomele dobîndesc respectiv forma:

$$Ax_1 \ (p \vee p) \to p$$

$$Ax_2 \ p \to (p \vee q)$$

$$Ax_3 \ (p \vee q) \to (q \vee p)$$

$$Ax_4 \ (p \to q) \to [(r \vee p) \to (r \vee q)]$$

Ca reguli de deducție se acceptă în primul rînd regula substituției și regula *modus ponens*, dar în afară de aceste reguli fundamentale construiește încă un șir de reguli corespunzătoare axiomelor și de asemenea reguli corespunzătoare unor teoreme.

5. *Sistemul lui Alonzo Church* (S_C)

Alonzo Church a construit un sistem cu trei axiome în care se ia ca bază un singur functor, și anume →

O altă particularitate a acestui sistem constă în faptul că pe lîngă variabilele *p*, *q*, *r*, admite și o constantă f (fals).

$$Ax_1 \ p \to (q \to p)$$

$$Ax_2 \ [s \to (p \to q)] \to [(s \to p) \to (s \to q)]$$

$$Ax_3 \ [(p \to f) \to f] \to p^*$$

* A. Church folosește pentru implicație semnul „⊃", iar semnul „→" înseamnă: „este prescurtare pentru". De exemplu Df. 1 arată astfel: $t \to f \supset f$ (*t* de la cuvîntul „truth").

Ca reguli de deducție sînt acceptate regula substituției și *modus ponens*.

În afară de axiome și reguli, A. Church introduce o serie de definiții de întrebuințare (prescurtări).

6. *Sistemul lui Nicod* (S_N)

J. Nicod a construit un sistem cu o singură axiomă și numai cu ajutorul functorului incompatibilității (/):

Ax_1 $[p / (q / r)] / \{[s / (s / s)] / [(t / q) / [(p / t) / (p / t)]]\}$

Ca reguli de deducție se acceptă

R_1. Regula substituției.

R_2. $\dfrac{A, A / (B / C)}{C}$

Hilbert și Bernays au considerat un sistem în care apar toți functorii de bază ai logicii propozițiilor.

Expunerea acestui sistem e dată în lucrarea *Grundlagen der Mathematik*. După cum arată Hilbert, un asemenea sistem permite să se scoată mai bine în evidență rolul fiecărei legături logice în procesul deducției. Este de observat că sistemele expuse aci sînt nebooleene.

Numărul axiomelor și regulilor poate fi mărit nelimitat. Dacă sub aspectul economic un sistem cu mai puține axiome și reguli este mai avantajos, sub raportul deducției este mai comod un sistem cu mai multe axiome și reguli.

În cele ce urmează vom da exemple de deducție în diferite sisteme axiomatice.

Exercițiul 1

Să se demonstreze în S_F, S_L, S_R, S_H, S_C, propoziția $p \rightarrow p$ (reflexivitatea implicației).

I. S_F. Deoarece demonstrația în S_F se aseamănă cu demonstrația în S_L ne oprim numai asupra unuia din cele două sisteme, anume S_L.

Am arătat că „schema de axiomă" diferă de axiomă. Schema de axiomă este un mod de a descrie o mulțime nesfîrșită de axiome care au aceeași formă (Kleene). Simbolurile A, B, C, ... reprezintă formula. Ori de cîte ori luăm formule reprezentate de literele A, B, C, obținem *axiome*.

Lukasiewicz vorbește de *aplicarea schemelor*, nu de substituție, dar diferența între *aplicarea schemelor* și regula

substituției este mai mult o subtilitate teoretică, practic neavînd vreo importanță.

Demonstrația decurge în felul următor.

II. S_I. În Sch. Ax_2 înlocuim pe B cu $B \to A$ și pe C cu A, și obținem

1) $\{A \to [(B \to A) \to A]\} \to \{[A \to (B \to A)] \to (A \to A)\}$

În Sch. Ax_1 efectuăm înlocuirea lui B cu $B \to A$ și obținem:

2) $A \to [(B \to A) \to A]$

Expresiile 1) și 2) reprezintă noi scheme de axiome.

Din 1) și 2) conform cu *modus ponens* obținem:

3) $[A \to (B \to A)] \to (A \to A)$

Din 3) și Sch. Ax_1 conform cu *modus ponens* deducem

4) $A \to A$

Din schema 4) decurge că are loc și axioma

5) $p \to p$

III. S_R. În Ax_5 operăm $pS\bar{p}$* și obținem:

1) $(q \to r) \to [(\bar{p} \vee q) \to (\bar{p} \vee r)]$

Din 1) conform cu Df. implicației obținem:

2) $(q \to r) \to [(p \to q) \to (p \to r)]$

În 2) operăm $qS(p \vee p)$, rSp și obținem:

3) $[(p \vee p) \to p] \to \{[p \to (p \vee p)] \to (p \to p)\}$

Din 3) și Ax_1 conform cu *modus ponens* obținem:

4) $[p \to (p \vee p)] \to (p \to p)$

Din Ax_2 prin qSp obținem:

5) $p \to (p \vee p)$

Din 4) și 5) conform cu *modus ponens* obținem:

6) $p \to p$. Q.E.D.

---

* Reamintim că operația de substituție este notată prin „S".

IV. S_H. Hilbert demonstrează propoziția $p \to p$, bazîndu-se pe regula tranzitivității.
Va trebui deci să demonstrăm mai întîi această regulă.
În Ax_4 operăm $rS\bar{r}$ și obținem:

1) $(p \to q) \to [(\bar{r} \vee p) \to (\bar{r} \vee q)$

Din 1) conform cu definiția de întrebuințare a implicației obținem:

2) $(p \to q) \to [(r \to p) \to (r \to q)]$

În 2) operăm pSB, qSC, rSA și obținem:

3) $(B \to C) \to [(A \to B) \to (A \to C)]$

Conform cu aceasta formulăm regula tranzitivității printr-o dublă aplicare a regulii *modus ponens*:

4) Dacă $B \to C$ și $A \to B$ atunci $A \to C$

Altfel scris:

5) Dacă $A \to B$ și $B \to C$ atunci $A \to C$

În Ax_2 operăm qSp și obținem:

6) $p \to (p \vee p)$

Din 6) și Ax_1 conform cu regula tranzitivității (vezi mai sus) obținem:

7) $p \to p$ Q.E.D.

V. S_C (sistemul lui Church).
În Ax_2 operăm pSr și obținem:

1) $[s \to (r \to q)] \to [(s \to r) \to (s \to q)]$

Din 1) prin qSp obținem:

2) $[s \to (r \to p)] \to [(s \to r) \to (s \to p)]$

Din 2) prin sSp obținem:

3) $[p \to (r \to p)] \to [(p \to r) \to (p \to p)]$

Din 3) prin rSq obținem:

4) $[p \to (q \to p)] \to [(p \to q) \to (p \to p)]$

Din 4) şi Ax_1 cu ajutorul regulii *modus ponens* obţinem:

5) $(p \to q) \to (p \to p)$

Din 5) prin $qS(q \to p)$ obţinem:

6) $[p \to (q \to p)] \to (p \to p)$

Din 6) şi Ax_1 obţinem conform cu *modus ponens*:

7) $p \to p$ Q.E.D.

Exerciţiul 2

Să se demonstreze în S_H formulele $\bar{p} \lor p$, $p \lor \bar{p}$, $p \to \bar{\bar{p}}$ şi $\bar{\bar{p}} \to p$

a. Demonstraţia formulei $\bar{p} \lor p$ este deja dată pe baza formulei $p \to p$, deoarece prin definiţie $p \to p = \bar{p} \lor p$

b. Formula $p \lor \bar{p}$ se obţine din $\bar{p} \lor p$ prin aplicarea regulei corespunzătoare Ax_2, adică a regulei: dacă $A \lor B$ atunci $B \lor A$

Conform cu această regulă dacă $\bar{p} \lor p$ e dovedit atunci e dovedit şi $p \lor \bar{p}$, or e dovedit $\bar{p} \lor p$, deci e dovedit $p \lor \bar{p}$

c. Formula $p \to \bar{\bar{p}}$ se demonstrează astfel. Operăm în formula $p \lor \bar{p}$, $pS\bar{p}$ şi obţinem:

1) $\bar{p} \lor \bar{\bar{p}}$. Din 1) conform cu Df. implicaţiei obţinem:

2) $p \to \bar{\bar{p}}$

d. Formula $\bar{\bar{p}} \to p$ se demonstrează astfel.
Din formula $p \to \bar{\bar{p}}$ prin $pS\bar{p}$ obţinem:

1) $\bar{p} \to \bar{\bar{\bar{p}}}$

Din 1) conform cu regula: dacă $A \to B$ atunci $(C \lor A) \to \to (C \lor B)$ (vezi Ax_4) obţinem:

2) $p \lor \bar{p} \to p \lor \bar{\bar{\bar{p}}}$. Din 2) şi formula $p \lor \bar{p}$ prin *modus ponens* obţinem:

3) $p \lor \bar{\bar{\bar{p}}}$. Din 3) prin aplicarea regulei corespunzătoare Ax_3 obţinem:

4) $\bar{\bar{\bar{p}}} \lor p$

Reintroducînd semnul de prescurtare $\to$, obţinem:

4) $\bar{\bar{p}} \to p$ Q.E.D.

Demonstrația în sistemul lui Nicod e foarte greoaie și nu o dăm aici. De altfel sistemul lui Nicod prezintă un interes mai mult teoretic.

Din demonstrațiile de mai sus rezultă că în diferite sisteme una și aceeași teoremă se demonstrează diferit. Demonstrația decurge formal, numai cu ajutorul axiomelor și regulilor și nu e nevoie de nici un fel de apel la intuiție. Mai mult, nu ne interesează nici măcar sensul și semnificația simbolurilor. O asemenea demonstrație în care sensul și semnificația simbolurilor nu ne interesează de loc se numește *formalizată*.

§ 29. PROPRIETĂȚILE SISTEMELOR AXIOMATICE

Unui sistem axiomatic i se impun o serie de proprietăți. Cele mai însemnate proprietăți sînt ***noncontradicția***, ***independența*** și ***completitudinea***.

1) *Noncontradicția (consistența)*. Există mai multe moduri de a defini acest concept.

Df. 70 a) Un sistem axiomatic (și în general orice sistem teoretic) este noncontradictoriu dacă în el nu poate fi dedusă nici o propoziție împreună cu negația ei, adică dacă în el nu este teoremă o expresie de forma $A \cdot \bar{A}$.

Church numește aceasta „noncontradicție relativă la transformare"

Df. 70 b) Sistemul deductiv este *absolut noncontradictoriu* dacă nu toate propozițiile sînt teoreme în acest sistem.

Post, căruia de altfel îi este atribuită prima demonstrație de noncontradicție a logicii propozițiilor, a dat o definiție specială pe care Church o numește „noncontradicție în sensul lui Post":

Df. 70 c) Sistemul logic este noncontradictoriu dacă nici o formulă care constă numai dintr-o variabilă propozițională nu este teoremă.

Sistemul este contradictoriu dacă în el se deduce orice formulă. Se vede că definiția 70 b) este construită tocmai prin raport cu acest fel de a înțelege contradicția sistemului.

Există mai multe moduri de a demonstra noncontradicția. Dăm aci cel mai răspîndit procedeu a cărui origine se află în opera lui Post.

Alegem pentru aceasta sistemul lui Hilbert. Considerăm două semnificații 1, 0 și demonstrăm cu ajutorul matricelor

că $Ax_1 - Ax_4$ au pretutindeni valoarea 1, dacă $W = 1$; sau 0, dacă $W = 0$

Rămîne să dovedim că pornind de la axiome cu ajutorul regulilor nu ajungem la o contradicţie.

Pentru regula *modus ponens* acest lucru se dovedeşte uşor: dacă $A = 1$ şi $A \rightarrow B = 1$ atunci şi $B = 1$; or o axiomă oarecare $A_i = 1$ (ceea ce s-a stabilit prin matrice).

Fie o axiomă A_i şi o formulă T. Conform cu *modus ponens*, deoarece $A_i = 1$ şi $A_i \rightarrow T = 1$, $T = 1$

Într-adevăr, este exclus $T = 0$

Să presupunem că $T = 0$. Pentru $A_i \rightarrow T = 1$, ar trebui să avem $1 \rightarrow 0 = 1$, ceea ce este exclus prin definiţie.

În alt mod.

$$A_i \rightarrow T = \bar{A}_i \vee T$$

$$\bar{A}_i = 0 \text{ (deoarece } A_i = 1)$$

$$\bar{A}_i \vee T = 0 \vee T = T \text{ (prin legea posibilităţii).}$$

$$A_i \rightarrow T = T$$

T va avea deci valoarea lui $A_i \rightarrow T$, adică 1

Pentru regula substituţiei demonstraţia e următoarea: Fie o formulă propoziţională $P(p)$. Dacă $P(p) = 1$, atunci operînd pSq obţinem $P(q)$, astfel că $P(q) = 1$

Într-adevăr, domeniul de semnificaţie al lui p fiind (1, 0), avem:

$$P(1) = 1$$

$$P(0) = 1,$$

or domeniul de semnificaţii al lui q fiind de asemenea (1, 0) situaţia rămîne neschimbată prin substituţie.

Deoarece $Ax_1 - Ax_4$ în S_H au valoarea 1, teoremele obţinute prin substituţie vor avea în acord cu cele de mai sus valoarea 1. O propoziţie oarecare T dedusă din axiome prin substituţie are valoarea 1, iar negaţia ei $\bar{T} = 0$. În acest fel nu se poate demonstra $T \cdot \bar{T}$ şi deci S_H este necontradictoriu.

2) Independenţa axiomelor

Df. 71. Spunem că o axiomă este independentă dacă ea nu se poate deduce din nici o altă axiomă a sistemului dat.

Dăm ca exemple de demonstraţie a independenţei, demonstraţia independenţei Ax_2 din S_H.

Pentru aceasta ne folosim de o anumită interpretare, şi anume variabilele p, q, r, ... sînt definite pe următoarea mulţime de semnificaţii: {0, 1, 2, 3}

Definim operatorii $\vee$, — prin raport cu această mulţime de semnificaţii. Folosim pentru $\vee$ o matrice specială. Matricea negaţiei este simplă. Matricea disjuncţiei este formată astfel: în dreapta pe orizontală şi în stînga pe verticală sus sînt aşezate valorile argumentelor, iar în spaţiul din mijloc valorile corespunzătoare ale funcţiei.

Negaţia.

$\bar{p}$	0	1	2	3
p	1	0	3	2

Disjuncţia.

p \ q	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1
2	0	1	2	2
3	0	1	2	3

Ax_1, Ax_2, Ax_4 au prin raport cu aceste semnificaţii numai semnificaţiile 0 şi 2.

Să considerăm Ax_1: $\overline{\bar{p} \vee \bar{p}} \vee \bar{p}$

p	$\bar{p} \vee p$	$\overline{\bar{p} \vee p} \vee p$
0	1	0
1	0	0
2	3	2
3	2	2

Într-adevăr, $Ax_1 = 0\ 0\ 2\ 2$

La rîndul lor toate propoziţiile deductibile din Ax_1, Ax_3, Ax_4 păstrează această proprietate — a avea numai semnificaţiile 0 şi 2

Considerăm regula *modus ponens*:

$$\frac{A,\ \bar{A} \vee B}{B}$$

Deoarece A şi $\bar{A} \vee B$ desemnează axiome (sau teoreme) vom avea prin definiţie:

(a) $A = 0$ sau $A = 2$

(b) $\bar{A} \vee B = 0$ sau $A \vee B = 2$

Conform cu matricea negației vom avea apoi:

(c) $\bar{A} = 1$ sau $\bar{A} = 3$ și deci, prin înlocuirea lui $\bar{A}$ cu valorile corespunzătoare

(d) $\bar{A} \vee B = 1 \vee B$ sau $\bar{A} \vee B = 3 \vee B$

Conform cu (b) și cu matricea disjuncției obținem apoi:

(e) $1 \vee B = 0$; $3 \vee B = 0$; $3 \vee B = 2$

$1 \vee B = 0$ dacă $B = 0$

$3 \vee B = 0$ dacă $B = 0$

$3 \vee B = 2$ dacă $B = 2$

Așadar, B trebuie să fie $B = 0$ sau $B = 2$. *Q.E.D.*

Pentru regula substituției problema e ușoară deoarece variabila substituită are același domeniu de semnificații ca și oricare altă variabilă, iar definiția operatorului rămîne aceeași.

Ax_2 însă se deosebește de axiomele 1, 3, 4 și de toate teoremele deduse din ele deoarece are semnificația 1 pentru $p = 2$ și $q = 1$

Într-adevăr, operăm în Ax_2 $pS2$ și $qS1$ și obținem:

$$3 \vee (2 \vee 1) = 3 \vee 1 = 1$$

În acest fel independența Ax_2 a fost demonstrată.

3) *Completitudinea*

Completitudinea are mai multe definiții.

Df. 72 a) Spunem că un sistem este complet dacă toate formulele *identic-adevărate* sînt deductibile în acest sistem. Aceasta este completitudinea prin raport cu cele două valori W, F. Există și o definiție pur formală (nu face apel la interpretare).

Df. 72 b) Spunem că S este un sistem complet dacă adăugînd la acest sistem o formulă A care nu se deduce din S obținem:

$$S(A) \rightarrow X \cdot \bar{X},$$

deci putem deduce o contradicție în S. Fie la S_H să adăugăm formula $p \vee q$

Din Ax_3 și $p \vee q$ se deduce $q \vee p$

Din $q \vee p$ prin qSp putem deduce:

$$p \vee p,$$

iar prin $pS\bar{p}$ deducem:

$$\bar{p} \vee \bar{p}$$

Mai departe, din $p \vee p$ se deduce p, iar din $\bar{p} \vee \bar{p}$ se deduce $\bar{p}$

În acest fel am dedus p și $\bar{p}$, adică $p \cdot \bar{p}$. Sistemul S_H este complet.

§ 30. CALCULUL NATURAL

Pînă acum am făcut cunoștință cu două moduri de organizare a calculului propozițiilor: calculul definițional și calculul axiomatic. Există însă un mod de a expune logica mai apropiat de gîndirea obișnuită a matematicianului, gîndire prin *supoziții* sau *ipoteze*. În acest calcul nu apar nici definiții, nici axiome, ci numai reguli sau „scheme de deducție". Acest calcul poartă numele de „calcul natural" și el a fost descoperit concomitent de Gentzen și Jaskowski*. Reproducem aici calculul natural, în forma dată de Gentzen.

Gentzen stabilește două tipuri de reguli de calcul („scheme de deducție"): reguli de introducere și de eliminare a semnelor. Iată acest sistem de reguli.

Prima regulă a introducerii conjuncției:

$$\frac{A, B}{A \cdot B}$$

---

* În calculul natural, exact ca în silogistica lui Aristotel, se arată *ce putem deduce* din anumite propoziții date (ipoteze), fără să ne intereseze faptul dacă ele sînt sau nu demonstrate. Spre deosebire de calculul axiomatic unde premisele se socotesc totdeauna adevărate (demonstrate) și unde deci consecința este nu numai *formală* (= corect dedusă), ci și *materială* (dedusă din premise demonstrate), în calculul natural consecința ne interesează numai sub aspect formal.

Orice schemă de deducție se reduce, în ultimă instanță, la asertiunea că *dintr-o anumită presupunere rezultă o anumită consecință*. A găsi ce posibilități de deducție avem prin raport cu cutare sau cutare tip de presupuneri (supoziții, ipoteze) aceasta este sarcina calculului natural. O revenire deci pe un alt plan la Aristotel.

Ca și la Aristotel pentru orice schemă de deducție este valabilă asertiunea: *dacă ipotezele (presupunerile) sînt adevărate și dacă schema este corect aplicată, atunci concluzia este adevărată*. În acest fel, deși nu ne interesează dacă premisele sînt sau nu demonstrate, noi studiem totuși acele scheme *care în aplicație sînt capabile să ne ducă la un anumit rezultat, la concluzii adevărate*. Cu alte cuvinte, în mod tacit noi ținem seama de adevărul premiselor, este drept *ca presupunere* (ca supoziție) și *ca scop* (în vederea aplicării schemei) și nu *de fapt*.

Aceasta înseamnă: din presupunerea lui A şi din presupunerea lui B, decurge $A \cdot B$.

A doua regulă a introducerii conjuncţiei:

$$\frac{A,\ B}{B \cdot A}$$

Prima regulă a introducerii disjuncţiei:

$$\frac{A}{A \vee B}$$

A doua regulă a introducerii disjuncţiei:

$$\frac{B}{A \vee B}$$

Regula introducerii implicaţiei:

$$\frac{\Gamma,\ A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

Dacă avem o mulţime de premise Γ (ea poate fi şi vidă) şi dacă din Γ şi din A se deduce B, atunci din Γ se demonstrează $A \rightarrow B$, iar dacă Γ este o mulţime vidă, atunci $A \rightarrow B$ este adevărat fără nici o premisă sau, altfel spus, $A \rightarrow B$ este o formulă deductibilă dintr-o mulţime vidă de premise.

Regula introducerii implicaţiei mai poate fi scrisă şi astfel:

$$\frac{A \vdash B}{A \rightarrow B}$$

Regula introducerii negaţiei:

$$\frac{A \rightarrow B}{\bar{B} \rightarrow \bar{A}}$$

A doua regulă a introducerii negaţiei:

$$\frac{A}{\bar{\bar{A}}}$$

Pe lîngă aceste reguli de introducere există un şir de reguli corespunzătoare de excludere (eliminare).

Regulile excluderii conjuncţiei:

$$\frac{A \cdot B}{A} \qquad \frac{A \cdot B}{B}$$

Aceasta înseamnă: din presupunerea lui $A \cdot B$ rezultă A, din presupunerea lui $A \cdot B$ rezultă B.

Regula excluderii disjuncției:

$$\frac{A \vee B,\ A \vdash C,\ B \vdash C}{C}$$

Regula excluderii implicației *(modus ponens)*:

$$\frac{A,\ A \rightarrow B}{B}$$

Regula excluderii negației:

$$\frac{\bar{\bar{A}}}{A}$$

Cu ajutorul acestor reguli fundamentale putem demonstra un şir de alte reguli. Un rol fundamental în această deducție naturală joacă regula introducerii implicației. Într-adevăr, linia de separație între premise şi concluzie înseamnă acelaşi lucru ca şi semnul „$\vdash$", adică „... se deduce că...". De aci orice regulă mai poate fi formulată în întregime cu ajutorul semnului „$\vdash$". Ex. regula excluderii negației:

$$\bar{\bar{A}} \vdash A$$

Dacă la aceasta aplicăm regula introducerii implicației este comod să folosim ambele semne:

$$\frac{\bar{\bar{A}} \vdash A}{\bar{\bar{A}} \rightarrow A}$$

În acest fel putem obține diferite teze ale calculului propozițiilor cu ajutorul regulii introducerii implicației. Dăm exemple de demonstrație în calculul lui Gentzen.

Ex. 1. Să se demonstreze regula:

$$\frac{A \cdot B}{B \cdot A}$$

şi respectiv teza $(A \cdot B) \rightarrow (B \cdot A)$

a) Vrem să dovedim pe $B \cdot A$ din $A \cdot B$, în condițiile în care este dat $A \cdot B$.

Din $A \cdot B$ cu ajutorul regulii excluderii conjuncției deducem pe A şi pe B, ceea ce se scrie astfel:

$$\frac{A \cdot B}{A}, \qquad \frac{A \cdot B}{B}$$

Dacă la cele două premise obținute aplicăm a doua regulă de introducere a conjuncției obținem formula căutată:

$$\frac{A,\ B}{B \cdot A}$$

Scriem consecutiv:

$$\begin{array}{cl} A \cdot B & \\ \hline A,\ B & \text{(eliminarea conjuncției)} \\ \hline B \cdot A & \text{(introducerea conjuncției, regula a doua)} \end{array}$$

Aşadar, $\frac{A \cdot B}{B \cdot A}$, sau $A \cdot B \vdash B \cdot A$. De aci cu ajutorul regulii de introducere a implicației obținem teza cerută.

$$\frac{A \cdot B \vdash B \cdot A}{A \cdot B \rightarrow B \cdot A}$$

Ex. 2. Să se demonstreze regula:

$$\frac{A \cdot (B \cdot C)}{(A \cdot B) \cdot C}$$

Dem.
$$\begin{array}{cl} A \cdot (B \cdot C) & \\ \hline A,\ (B \cdot C) & \text{(eliminarea conjuncției)} \\ \hline A,\ B,\ C & \text{(eliminarea conjuncției)} \\ \hline A \cdot B,\ C & \text{(introducerea conjuncției)} \\ \hline (A \cdot B) \cdot C & \text{(introducerea conjuncției)} \end{array}$$

Ex. 3. Să se demonstreze regula:

$$\frac{A \vee B}{B \vee A}$$

Dem. Presupunem separat A, ceea ce vom scrie astfel $[A]$ şi presupunem separat B, adică $[B]$. Este necesar să presupunem separat pe A și B deoarece presupunerea disjuncției $A \vee B$ nu este identică cu presupunerea celor două propoziții luate separat. Avem:

$$\begin{array}{cl} A \vee B,\ [A],\ [B] & \\ \hline B \vee A,\ B \vee A & \text{(introducerea disjuncției)} \\ \hline A \vee B,\ A \vdash B \vee A,\ B \vdash B \vee A & \\ \hline B \vee A & \text{(eliminarea disjuncției)} \end{array}$$

ceea ce şi era de demonstrat.

Ex. 4. Să se demonstreze regula scoaterii în factor comun *:

$$\frac{AB \vee AC}{A(B \vee C)}$$

Dem.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[A\cdot B]}{A,\ B} \qquad \cfrac{[A\cdot C]}{A,\ C}}{A,\ B \vdash B \vee C,\quad C \vdash B \vee C}}{A,\ B \vee C}}{A\cdot(B \vee C)}$$

Ex. 5. Să se demonstreze regula:

$$\frac{A \vee (B\cdot C)}{(A \vee B)\cdot(A \vee C)}$$

Aceasta este regula distributivității disjuncției față de conjuncție.

Dem. $A \vee (B\cdot C)$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[A]}{A \vee B,\ A \vee C}}{(A \vee B)\cdot(A \vee C)} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[B\cdot C]}{B,\ C}}{A \vee B,\ A \vee C}}{(A \vee B)\cdot(A \vee C)}}{(A \vee B)\cdot(A \vee C)}$$

Ex. 6. Să se demonstreze regula:

$$\frac{A\,(B \vee C)}{A\,B \vee A\,C}$$

Dem.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A,\ [B]}{A\cdot B} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A(B \vee C)}{A,\ B \vee C}}{[B],\ [C]}}{A,\ [C]}}{A\cdot C}}{A\cdot B \vee A\cdot C,\quad A\cdot B \vee A\cdot C}}{AB \vee AC}$$

Explicăm această demonstrație.

---

* În continuare, cititorul va distinge singur care anume regulă trebuie aplicată.

Fiind dată formula $A(B \vee C)$, prin eliminarea conjuncţiei obţinem formulele A şi $B \vee C$. Deoarece $B \vee C$ înseamnă că poate avea loc una sau alta (sau chiar amîndouă) facem presupunerea că are loc B, ceea ce scriem $[B]$. Din A şi $[B]$ deducem conform cu regula de introducere a conjuncţiei $A \cdot B$. Presupunem apoi pe C, adică $[C]$. Din A şi $[C]$ deducem $A \cdot C$ conform cu regula de introducere a conjuncţiei. Din AB deducem $AB \vee AC$ conform cu regula de introducere a disjuncţiei. Din AC deducem $AB \vee AC$ conform cu regula de introducere a disjuncţiei. Conform cu regula excluderii disjuncţiei avem:

$$\frac{AB \vee AC,\ AB \vdash AB \vee AC,\ AC \vdash AB \vee AC}{AB \vee AC}$$

adică dacă avînd $AB \vee AC$ din AB se deduce $AB \vee AC$ şi din AC se deduce $AB \vee AC$ atunci se deduce $AB \vee AC$, ceea ce era de demonstrat.

§ 31. LOGICI NECLASICE

Logica studiată pînă acum este o logică clasică, adică o logică cu două valori (W, F). Este un lucru evident că în gîndirea noastră există şi enunţuri identice ca formă cu enunţurile adevărate sau false, dar ele nu sînt totuşi nici adevărate, nici false. Aşa, de exemplu, enunţul: „propoziţia scrisă pe această pagină în ghilimele este falsă" (este vorba chiar de această propoziţie) nu este nici adevărat, nici fals, căci presupunerea că este adevărat ne duce la concluzia că este fals, iar presupunerea că este fals ne duce la concluzia că este adevărat. Nu putem califica această „propoziţie" cu ajutorul predicatelor „adevăr" sau „fals" şi trebuie s-o calificăm cu un alt predicat, de ex. „absurd" Dacă luăm în consideraţie faptul că mulţimea propoziţiilor constă din trei tipuri de propoziţii: adevărate, false şi absurde — atunci evident logica corespunzătoare mulţimii formate din trei tipuri de propoziţii nu corespunde mulţimii formate din două tipuri de propoziţii.

În primul rînd, regula după care orice propoziţie este sau adevărată sau falsă îşi pierde sensul, deoarece este posibilă şi o a treia situaţie. În acest fel vom avea o nouă lege caracteristică acestei mulţimi: *orice propoziţie este sau adevărată sau falsă sau absurdă.*

Aceasta este o cale de extindere a logicii. Există însă şi o altă cale oferită de interpretarea formal algebrică a valorilor propoziţiei (1, 0). Putem presupune că „aritmetica" noastră binară poate fi înlocuită cu o „aritmetică" ternară, cuaternară ş.a.m.d., adică putem admite că în afară de 1, 0, avem şi alte valori, şi anume 2, 3 ş.a.m.d. Legile „aritmeticii" binare nu sînt identice total cu legile „aritmeticii" n-are.

Pornind de la faptul că există mai multe tipuri de propoziţii (în particular propoziţiile de posibilitate), logicianul polonez Lukasiewicz a construit în anul 1920 o logică neclasică cu trei valori: adevăr, fals, posibil — numită logică trivalentă. Tot în 1920 logicianul american Post, pornind de la consideraţii identice cu acelea expuse mai sus, adică de la interpretarea formal algebrică a logicii propoziţiilor, a construit un sistem neclasic n-valent. Cu totul pe altă cale a construit Heyting aşa-numita „logică intuiţionistă", care admite o infinitate de valori. El a pornit de la consideraţiile lui Brouwer în legătură cu inaplicabilitatea legilor terţiului exclus şi dublei negaţii, adică:

$$p \vee \bar{p}$$

şi

$$\bar{\bar{p}} \rightarrow p$$

la mulţimile transfinite. Construind un sistem bivalent axiomatic care admite ca axiome, printre altele, expresiile „$p \vee \bar{p}$" şi „$\bar{\bar{p}} \rightarrow p$", dacă suprimăm aceste axiome vom suprima concomitent şi mulţimea teoremelor a căror deducţie se sprijinea pe aceste axiome. În acest fel se obţine pe calea suprimării unor axiome (legi) un nou sistem logic.

Introducerea unor valori noi duce la schimbarea definiţiei functorilor propoziţionali. În cele ce urmează dăm ca exemplu de sistem neclasic logica trivalentă a lui Lukasiewicz.

§ 32. LOGICA TRIVALENTĂ A LUI LUKASIEWICZ

Dat fiind numărul mai mare de valori ($m=3$), forma matricelor se schimbă întrucîtva.

Fie valorile 1, 0, $\frac{1}{2}$, ceea ce în interpretare corespunde cu: adevăr, fals, posibil.

Considerăm matricele conjuncției, disjuncției, negației, implicației.

Conjuncția

$p \backslash q$	1	0	1/2
1	1	0	1/2
0	0	0	0
1/2	1/2	0	1/2

Valorile lui p sînt dispuse pe verticală înstînga, iar valorile lui q sînt dispuse pe orizontală în dreapta sus. La intersecția celor două serii de valori sînt dispuse valorile conjuncției. Astfel:

a) dacă $p = 1$ și $q = 1$, atunci $p \cdot q = 1$,

b) dacă $p = 1$ și $q = 0$, atunci $p \cdot q = 0$

c) dacă $p = 1$ și $q = \frac{1}{2}$, atunci $p \cdot q = \frac{1}{2}$

d) dacă $p = 0$ și $q = 1$, atunci $p \cdot q = 0$

e) dacă $p = 0$ și $q = 0$, atunci $p \cdot q = 0$

f) dacă $p = 0$ și $q = \frac{1}{2}$, atunci $p \cdot q = 0$

g) dacă $p = \frac{1}{2}$ și $q = 1$, atunci $p \cdot q = \frac{1}{2}$

h) dacă $p = \frac{1}{2}$ și $q = 0$, atunci $p \cdot q = 0$

i) dacă $p = \frac{1}{2}$ și $q = \frac{1}{2}$, atunci $p \cdot q = \frac{1}{2}$

În total avem nouă alegeri posibile pentru două variabile, adică $m^n = 3^2 = 9$

Disjuncția

$p \backslash q$	1	0	1/2
1	1	1	1
0	1	0	1/2
1/2	1	1/2	1/2

Negația

p	$\bar{p}$
1	0
0	1
1/2	1/2

$p \backslash q$	1	0	1/2
1	1	0	1/2
0	1	1	1
1/2	1	1/2	1

Putem apoi da definițiile liniare ale operatorilor:

1) $p \quad q = \min (p, q)$
2) $p \vee q = \max (p, q)$
3) $\bar{p} = 1 - p$
4) $p \rightarrow q = 1$ dacă $p \leqslant q$
$p \rightarrow q = 1 - p + q$ dacă $p > q$
$p \rightarrow q = \min (1, 1 - p + q)$

După cîte se vede, definițiile liniare ale conjuncției, disjuncției și negației rămîn identice cu cele din calculul clasic; dimpotrivă, definiția implicației este mult diferită.

În sistemul lui Lukasiewicz își încetează existența legile *

1) $\overline{p \quad \bar{p}}$
2) $p \vee \bar{p}$

Într-adevăr, dacă verificăm cu ajutorul matricelor nu vom obține:

$\overline{p \cdot \bar{p}} = 1$
$p \vee \bar{p} = 1$

p	$\bar{p}$	$p \cdot \bar{p}$	$\overline{p \cdot \bar{p}}$
1	0	0	1
0	1	0	1
1/2	1/2	1/2	1/2

În concluzie:

$\overline{p \cdot \bar{p}} = 1\ 1\ 1/2$. Legea noncontradicției nu are loc în sistemul lui Lukasiewicz.

p	$\bar{p}$	$p \vee \bar{p}$
1	0	1
0	1	1
1/2	1/2	1/2

* Se consideră în general că definiția legii logice (tautologia) rămîne aceeași în toate sistemele.

$p \vee \bar{p} = 1\ 1\ 1/2$. Legea terţiului exclus nu are loc în sistemul lui Lukasiewicz.

Să verificăm dacă are loc legea dublei negaţii.

p	$\bar{p}$	$\bar{\bar{p}}$	$\bar{\bar{p}} \rightarrow p$
1	0	1	1
0	1	0	1
1/2	1/2	1/2	1

În concluzie $\bar{\bar{p}} \rightarrow p = 1\ 1\ 1$. Legea dublei negaţii are loc în logica lui Lukasiewicz. Este interesant de analizat problema dacă în sistemul lui Lukasiewicz sînt legi negaţiile noncontradicţiei şi terţiului exclus.

Am văzut că noncontradicţia şi terţiul exclus *nu sînt legi* în logica lui Lukasiewicz. Să verificăm dacă negaţiile lor sînt valabile în această logică, adică:

$$\overline{\overline{p \cdot \bar{p}}} \quad \text{şi} \quad \overline{p \vee \bar{p}}$$

p	$\bar{p}$	$p \cdot \bar{p}$	$\overline{p \cdot \bar{p}}$	$\overline{\overline{p \cdot \bar{p}}}$
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2

Deoarece $\overline{\overline{p \cdot \bar{p}}} = 0\ 0\ 1/2$, conchidem că nici negarea legii noncontradicţiei nu are loc în sistemul lui Lukasiewicz:

p	$\bar{p}$	$p \vee \bar{p}$	$\overline{p \vee \bar{p}}$
1	0	1	0
0	1	1	0
1/2	1/2	1/2	1/2

$\overline{p \vee \bar{p}} = 0\ 0\ 1/2$. Rezultă că nici negarea legii terţiului exclus nu este lege în sistemul lui Lukasiewicz.

Tarski şi Wajsberg au axiomatizat sistemul lui Lukasiewicz.

Sistemul axiomatic al lui Wajsberg cuprinde 4 axiome:

Ax_1 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Ax_2 $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

Ax_3 $[(p \rightarrow \bar{p}) \rightarrow p] \rightarrow p$

Ax_4 $(\bar{q} \rightarrow \bar{p}) \rightarrow (p \rightarrow q)$

Ax_1, Ax_2, Ax_4 sînt tautologii şi în logica clasică. Ax_3 e o propoziţie necunoscută.

Să verificăm dacă Ax_3 este într-adevăr propoziție identic-adevărată.

p	$\bar{p}$	$p \to \bar{p}$	$(p \to \bar{p}) \to p$	$[(p \to \bar{p}) \to p] \to p$
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
1/2	1/2	1	1/2	1

Propoziția considerată este lege logică. Sistemul lui Lukasiewicz admite, după cum am mai arătat, următoarele interpretări: adevărat (1), fals (0) și posibil ($^1/_2$).

Tot un sistem trivalent, dar pornind de la alte interpretări, construiește D.A. Bocivar. *

---

* Bocivar ia ca punct de plecare valorile adevăr (R), fals (F) și absurd (S).

Bocivar împarte enunțurile (propoziționale) în două categorii: „clasice" („interioare") și „neclasice" („exterioare").

Enunțuri interioare	Enunțuri exterioare
„*A*"	„*A* este adevărat"
„non-*A*"	„*A* este fals"
„*A* și *B*"	„*A* este adevărat și *B* este adevărat"
„*A* sau *B*"	„*A* este adevărat sau *B* este adevărat"
„dacă *A* atunci *B*"	„Dacă *A* este adevărat atunci *B* este adevărat"
	„*A* este absurd"

Se observă că oricărui enunț interior îi corespunde un enunț de formă exterioară, dar inversa nu mai este adevărată, deoarece enunțului de forma „*A* este absurd" nu-i corespunde nici un enunț de formă interioară.

Bocivar definește prin matrice două funcții interioare: negația ($\sim$) și conjuncția ($\sqcap$) și două funcții de formă exterioară: afirmația ($\vdash$) și negația ($\urcorner$). Restul funcțiilor se definesc pe baza acestora.

a	$\sim a$
R	F
F	R
S	S

a	b	$a \sqcap b$
R	R	R
R	F	F
F	R	F
F	F	F
R	S	S
S	R	S
F	S	S
S	F	S
S	S	S

a	$\vdash a$
R	R
F	F
S	F

a	$\urcorner a$
R	F
F	R
S	F

Bocivar construiește acest calcul cu scopul de a *analiza* paradoxele teoriei mulțimilor. El demonstrează că enunțurile paradoxale fac parte din categoria enunțurilor absurde.

Formula identității nu este lege logică în logica lui D. A. Bocivar.

Un alt sistem trivalent este construit de Kleene. După cîte se observă se pot construi sisteme cu același număr de valori, dar diferite ca structură (definiția și chiar numărul functorilor diferă).

§ 33. SCRIEREA LUI LUKASIEWICZ

Înainte de a încheia capitolul „Logica propozițiilor" este util să facem cîteva considerații asupra simbolismului (sistemul de scriere folosit).

Simbolismul folosit pînă aci e datorat în mare parte lui Russell și Hilbert.

În principal el este caracterizat prin:

a) folosirea parantezelor,

b) functorii n-ari $(n > 1)$ stau între variabile.

Lukasiewicz a inventat o scriere fără paranteze în care functorii stau înaintea variabilelor. Ca model al acestei scrieri poate sluji o funcție matematică

$$f(x),$$

care însă e scrisă cu suprimarea parantezelor

$$fx$$

Iată simbolurile principale date corespunzător cu simbolurile cunoscute anterior:

K &

A $\vee$

C $\rightarrow$

N —

E $\equiv$

Funcțiile corespunzătoare vor fi:

$$Cpq, \quad Kpq, \quad Apq, \quad Np, \quad Epq$$

O funcție mai complicată ca de ex. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \cdot q)$ se scrie

$$CCpqKpq$$

Această scriere este evident mai puțin intuitivă, dar prezintă avantaje pentru calcul.

Mai dificilă este traducerea acestui limbaj în cel al lui Russell — Hilbert.

Fie expresia:

$$C\{C[C(K(A\,p\,q)\,r)(A\,p\,q)(C\,p\,r)]\,q\}$$

Pentru a traduce această expresie procedăm în felul următor:

a) separăm de la dreapta la stînga funcțiile elementare (ord_2) cu ajutorul parantezelor,

$$C\,C\,C\,K\,(A\,p\,q)\,r\,(A\,p\,q)\,(C\,p\,r)\,q$$

b) separăm apoi funcțiile de ordin imediat superior (ord_3)

$$C\,C\,C\,(K\,(A\,p\,q)\,r)\,(A\,p\,q)\,(C\,p\,r)\,q$$

c) apoi funcțiile de ord_4 ș.a.m.d.

$$C\,\{C\,[C\,(K\,(A\,p\,q)\,r)\,(A\,p\,q)\,(C\,p\,r)]\,q\},$$

ceea ce se transcrie prin:

$$\{[((p \vee q)\cdot r) \rightarrow (p \vee q)] \rightarrow (p \rightarrow r)\} \rightarrow q$$

Transcriem definițiile liniare ale operatorilor în limbajul lui Lukasiewicz:

$$K\,p\,q = \min\,(p, q)$$
$$A\,p\,q = \max\,(p, q)$$
$$Np = 1 - p$$
$$C\,p\,q = \max\,(Np, q)$$
$$E\,p\,q = 1, \text{ dacă } p = q \text{ și } E\,p\,q = 0,$$

dacă $p \neq q$ (unde „$\neq$“ este semnul diferenței).

Introducerea limbajului lui Lukasiewicz are influență asupra formei unor reguli de calcul.

Ex., regula idempotenței:

$$\frac{A.A\ldots A}{A}$$

va avea forma:

$$\frac{K\,p\,p\,p}{p}$$

Regulile asociativității vor avea forma:

$$\frac{A\,A\,p\,q\,r}{A\,p\,q\,r}\,; \quad \frac{K\,K\,p\,q\,r}{K\,p\,q\,r}$$

Regula distributivității (I):

$$\frac{K\,p\,A\,q\,r}{A\,K\,p\,q\,K\,p\,r}$$

Regula distributivității (II):

$$\frac{A\,p\,K\,q\,r}{K\,A\,p\,q\,A\,p\,r}$$

O formă normală conjunctivă perfectă apare, de exemplu, astfel:

$$K\,A\,p\,q\,A\,p\,N\,q\,A\,N\,p\,q,$$

iar disjunctivă astfel:

$$A\,K\,p\,q\,K\,p\,N\,q\,K\,N\,p\,q$$

Capitolul II

LOGICA PREDICATELOR
(Logica extinsă a propozițiilor)

§ 1. SIMBOLISMUL LOGICII PREDICATELOR

Limbajul introdus pînă acum este necesar și suficient pentru studiul raporturilor logice dintre propoziții considerate drept ceva elementar. Dacă luăm în considerație structura propozițiilor cu scopul de a studia, de exemplu, raționamentele de tip silogistic, atunci acest limbaj nu mai este suficient.

Să considerăm următorul silogism:

Toate metalele sînt elemente chimice
Fierul este un metal
―――――――――――――――――――――
Fierul este un element chimic

Să notăm prima propoziție cu p, pe a doua cu q și pe a treia cu r.

Expresia corespunzătoare în calculul propozițiilor a raționamentului de mai sus va fi:

$$(p \cdot q) \rightarrow r$$

S-ar părea că ne putem mulțumi cu o asemenea expresie pentru a reda silogismele, totuși lucrurile nu stau astfel deoarece în timp ce concluzia în silogismul de mai sus decurge cu necesitate, formula noastră $(p \cdot q) \rightarrow r$ nu este de loc necesară.

A găsi structura logică a silogismului de mai sus înseamnă a construi o expresie logic-necesară corespunzătoare acestei structuri.

În acest scop vom analiza structura propozițiilor.

Propoziția „Toate metalele sînt elemente chimice" constă conform logicii tradiționale din următoarele părți:

a) subiectul („metalele"),
b) predicatul („elemente chimice"),

c) cópula („sînt"),
d) cantitatea („toate").

Judecata de mai sus este o judecată universal-afirmativă. Structura ei poate fi redată schematic astfel:

$$T\ S - P,$$

unde „*T*" este o prescurtare pentru cuvîntul „toţi" („toate"), „*S*" este o prescurtare pentru cuvîntul „subiect", liniuţa „—" reprezintă cópula „este" („sînt"), iar „*P*" este o prescurtare pentru cuvîntul „predicat".

Într-o asemenea judecată, termenii *S* şi *P* desemnează ceva determinat. De exemplu, *S* poate desemna un individ sau o însuşire, iar *P* o însuşire.

O însuşire poate să fie şi subiect, iar un individ poate fi *numai* subiect. De exemplu, „Liviu Rebreanu" este o noţiune individuală care poate juca numai rol de subiect, dar noţiunea „om" poate fi şi subiect şi predicat. În judecata „Oamenii sînt muritori", noţiunea „om" este subiect, iar în judecata „Socrate este om", noţiunea „om" este predicat. Posibilitatea ca o noţiune să joace rol de subiect sau de predicat este unul din principiile care guvernează silogistica aristotelică.

Este posibil şi un alt mod de abordare — putem separa net subiectul de predicat cel puţin în anumite limite. Vom considera că sfera subiectului cuprinde numai indivizii, iar sfera predicatului (cel puţin deocamdată) — numai însuşiri.

În acest caz vom avea următoarea schemă logică: „individul *x* are însuşirea *F*". Convenim în general să notăm indivizii cu *x*, *y*, *z*, ... şi însuşirile cu *F**, *G*, *H*, ...

Atribuirea unei însuşiri individului va fi notată, de exemplu, astfel:

$$F\ (x),$$

şi expresia „*F* (*x*)" va fi numită schemă de funcţie propoziţională.

Dar ce este o funcţie propoziţională?

Întrucît am opus net indivizii şi însuşirile şi întrucît nu ne interesează un individ anumit sau o însuşire anumită, semnele *x*, *y*, *z*, ... şi *F*, *G*, *H*, ... vor juca rol de variabile, respectiv variabile individuale şi variabile predicative.

* A nu se confunda *F* de aci cu semnul falsului (*F*).

Dacă ne-am oprit la o însușire și vrem să o aplicăm unui individ, atunci obținem o expresie cu o parte variabilă și o parte determinată.

De exemplu, alegem însușirea *om* și scriem „Om (x)" sau, ceea ce este același lucru, dar mai puțin economic, „x este om".

O asemenea expresie se numește funcție propozițională.

Matematica este știința care lucrează în mod sistematic cu funcții propoziționale.

O ecuație de felul acesta „$x + y = 4$" este o funcție propozițională.

În afară de caracteristica indicată mai sus, funcția propozițională este determinată și prin faptul că ea nu este o expresie adevărată sau falsă (deci nu e propoziție), ci poate deveni adevărată sau falsă *.

Există două procedee de a transforma funcția propozițională în propoziție: substituția și cuantificarea.

Astfel, dacă substituim pe x și y din funcția „$x + y = 4$" cu 3 și respectiv cu 1 vom obține propoziția adevărată „$3 + + 1 = 4$"; dimpotrivă, pentru substituțiile $xS2$, $yS3$ vom obține propoziția falsă „$2 + 3 = 4$"

Alt procedeu de a transforma funcția propozițională în propoziție este cuantificarea variabilei.

A cuantifica o variabilă înseamnă a specifica dacă este vorba de un individ, unii indivizi sau toți indivizii.

De exemplu, dacă scriem: „predicatul om are loc pentru orice x", obținem o propoziție falsă, iar dacă scriem: „predicatul om are loc pentru unii x" (sau „există astfel de x pentru care are loc x este om") obținem o propoziție adevărată.

Cazul în care propoziția cuprinde o referire la *toți* indivizii domeniului considerat va fi numit „cuantificare universală", iar atunci cînd ne vom referi la *cel puțin un individ* (unii, există) vom vorbi de „cuantificare existențială".

Pentru a indica faptul că o variabilă este cuantificată universal, vom folosi semnul V („pentru orice") și vom scrie:

$$V\,x \text{ („pentru orice } x\text{")},$$

---

* Spre deosebire de funcțiile de adevăr, funcțiile propoziționale sînt definite pe două domenii de valori: domeniul valorilor argumentelor (indivizii) și domeniul valorilor funcției (adevărul și falsul).

iar pentru a indica faptul că variabila este cuantificată existențial vom folosi semnul $\exists$ („există") și vom scrie:

$\exists x$ („există astfel de x").

O variabilă căreia i se va aplica un cuantor va fi numită variabilă *fixă* sau *legată*, iar o variabilă fără cuantor va fi numită *liberă*.

Cele două propoziții de mai sus dobîndite prin cuantificarea funcției propoziționale „Om (x)" vor fi scrise astfel:

$$\forall x \text{ Om } (x)$$

$$\exists x \text{ Om } (x).$$

Dacă în locul predicatelor determinate (în cazul de față „om") vom pune variabilele predicative F, G, H, vom obține expresii de forma:

$$\forall x F(x), \ \forall x G(x),$$
$$\exists x F(x), \ \exists x G(x),$$

Expresiile de forma $\forall x F(x)$, ... se citesc astfel: „pentru orice x F de x", ..., iar expresiile de forma $\exists x F(x)$, se citesc: „există astfel de x că F de x".

Aceste expresii poartă numele de *scheme propoziționale*, după cum expresiile de forma $F(x)$, $G(x)$, se numesc *scheme de funcții propoziționale*.

Recapitulăm seria de simboluri și expresii nou introduse:

1. x, y, z, (variabile individuale),
2. F, G, H, (variabile predicative),
3. $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$, ... $F(y)$, $G(y)$, (scheme de funcții propoziționale),
4. $\forall x F(x)$, $\exists x$ F(x), (scheme propoziționale).

La simbolurile introduse mai sus vom adăuga întreaga listă a simbolurilor logicii propozițiilor. Logica astfel obținută va mai fi numită și *logica extinsă a propozițiilor*.

În ce privește noțiunea de expresie sau „formulă" a logicii predicatelor este util să fie introdusă în mod sistematic sau mai precis „recursiv" (recurent) cu ajutorul următorului sistem de reguli:

R_1. Toate expresiile logicii propozițiilor sînt formule și în logica predicatelor.

R_2. Orice schemă de funcție propozițională este formulă.

R_3. Orice schemă propozițională este formulă.
R_4. Dacă o expresie A este formulă a logicii predicatelor, atunci și $\bar{A}$ este formulă.
R_5. Dacă A și B sînt două formule în logica predicatelor, atunci $A \& B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, A/B, $A + B$, $A = B$ sînt de asemenea formule.
R_6. Dacă $A(x)$ este o formulă în care variabila x este liberă, atunci $\forall x\, A(x)$ și $\exists x\, A(x)$ sînt de asemenea formule.
R_7. În una și aceeași formulă o variabilă nu poate să apară în același timp liberă și legată (cuantificată).

De observat este că simbolurile A, B, C, ... desemnează o formulă oarecare din logica predicatelor. Ele nu trebuie confundate cu variabilele predicative.

O expresie de forma $A\,(x, y, ...)$ înseamnă o formulă care conține variabilele x, y,

Regulile $_1$—$_7$ se mai numesc și *reguli de formare.*

Conform cu regulile de mai sus vor fi formule următoarele expresii:

$$F\,(x) \cdot F\,(y)$$

$$F\,(x) \cdot \exists\, y\ F\,(y)$$

$$F\,(x) \vee \exists\, y\, G(y)$$

$$\forall\, x\, F\,(x) \rightarrow \exists\, y\ F\,(y) \text{ ș.a.}$$

Nu vor fi formule:

$$x,\ y,\ z,$$

$$F,\ G,\ H,$$

$$\forall\, x\ F\, x \cdot G\, x$$

Aceste serii de simboluri nu satisfac pe nici una din regulile $_1$—$_7$.

Introducem prin definiție noțiunea de *domeniu de acțiune al cuantorului.*

Df. 1. Fiind dată o formulă A care conține o variabilă x, dacă în fața acestei formule stă unul dintre cuantorii $\forall$, $\exists$ astfel

$$\forall\, x\ A\,(x),$$

$$\exists\, x\ A\,(x),$$

atunci formula A poartă numele de *domeniu de acțiune* al cuantorului respectiv. Domeniul de acțiune al cuantorului

se indică cu ajutorul parantezelor atunci cînd el constă din mai mult de o funcție propozițională.

De exemplu, în formulele $\forall x (F(x) \rightarrow F(y))$, $\forall x (F(x) \cdot G(y))$, formulele $F(x) \rightarrow F(y)$ și $F(x) \cdot G(y)$ constituie domenii de acțiune pentru cuantorul $\forall$, iar în formulele $\exists x (F(x) \vee G(x))$, $\exists x (F(x) = F(y))$, formulele $F(x) \vee G(x)$ și $F(x) = F(y)$ sînt domenii de acțiune pentru cuantorul $\exists$.

În legătură cu domeniul de acțiune al cuantorului mai introducem următoarea regulă pentru formule:

R_8. Dacă un cuantor se află în domeniul de acțiune al altui cuantor, atunci variabilele legate de acești cuantori trebuie să difere între ele.

De exemplu, expresia

$$\forall x (F(x) \rightarrow \exists x G(x))$$

nu este corectă. Ea devine corectă dacă pentru cuantorul $\exists$ folosim în locul variabilei x, de exemplu, variabila y:

$$\forall x (F(x) \rightarrow \exists y G(y))$$

Încălcarea regulilor 5 și 8 poartă numele de *colizia variabilelor*.

§ 2. REPREZENTAREA JUDECĂȚILOR DE PREDICAȚIE ÎN SIMBOLISMUL PREDICATELOR

Considerăm cele patru judecăți de bază ale logicii generale: judecata universal-afirmativă, judecata universal-negativă, judecata particular-afirmativă și judecata particular-negativă, notate respectiv cu *A*, *E*, *I* și *O*.

Schemele acestor judecăți în logica generală sînt următoarele:

A: $T\,S - P$ („toți *S* sînt *P*"),

E: $T\,S + P$ („toți *S* nu sînt *P*" sau „nici un *S* nu e *P*"),

I: $U\,S - P$ („unii *S* sînt *P*"),

O: $U\,S + P$ („unii *S* nu sînt *P*").

Structura unei asemenea judecăți constă din subiect (*S*), predicat (*P*), cópula (—), cantitate (*T* sau *U*) și calitate (afirmativă — notată prin cópulă pur și simplu, negativă — notată prin „+").

La prima vedere reprezentarea unei asemenea judecăţi ar consta din opunerea pentru fiecare parte a unui simbol corespunzător din logica noastră.

De exemplu, judecata *A* ar urma să fie reprezentată astfel:

$$\forall\, x\, F(x),$$

unde x este subiectul, F predicatul, $F(x)$ afirmarea predicatului despre subiect, iar $\forall$ cantitatea judecăţii.

La rîndul lor, judecăţile *E*, *I*, *O* ar urma să aibă respectiv reprezentările:

$$\forall\, x\, \overline{F(x)}$$

$$\exists\, x\, F(x)$$

$$\exists\, x\, \overline{(F(x))}$$

Aceste reprezentări nu sînt totuşi corecte, deoarece în timp ce „*S*" poate desemna şi însuşiri, „*x*" desemnează numai indivizi.

Această diferenţă iese şi mai mult în evidenţă atunci cînd se pune problema să „traducem" o propoziţie universală determinată, de exemplu propoziţia „toţi oamenii sînt muritori".

Pentru a „traduce" această propoziţie în simbolismul predicatelor va trebui să redăm cele două însuşiri ***om*** şi ***muritor***. Notăm, de exemplu, însuşirea *om* prin *O* şi însuşirea muritor prin *M*.

În mod prescurtat putem scrie deci propoziţia de mai sus astfel:

$$T\,O - M$$

Dacă reprezentarea ei în simbolismul predicatelor s-ar face conform cu cele spuse mai sus, am avea:

$\forall\, x\, M(x)$, adică „pentru orice x are loc muritor de x", propoziţie care diferă total de propoziţia „orice om este muritor"

Prima condiţie este aşadar ca propoziţia noastră să se refere la obiecte cu aceleaşi determinări, or noi avem două determinări: *om* şi ***muritor***.

Vom scrie respectiv, „obiectul cu determinarea *O*" şi „obiectul cu determinarea M", adică:

$$O(x) \text{ şi } M(x)$$

Propoziția „toți oamenii sînt muritori" poate fi parafrazată astfel: „toți indivizii care sînt oameni sînt în același timp și muritori". Între *a fi om* și *a fi muritor* este așadar o legătură necesară, încît putem spune: „dacă ceva este om, atunci este și muritor".

Între propoziția „toți oamenii sînt muritori" și propoziția „dacă ceva este om, atunci este și muritor" este o deosebire *formală* netă. Una cuprinde o judecată de predicație, iar cealaltă o judecată ipotetică. Există și o deosebire de *informație* sau numai de forma în care redăm informația? Această problemă cuprinde întreaga dispută asupra raportului dintre schemele logicii elementare ale judecăților A, E, I, O și schemele din calculul predicatelor. Pentru a nu da un răspuns pripit la această problemă vom afirma doar că propoziția ipotetică considerată redă cel puțin o parte din informația cuprinsă în propoziția de predicație respectivă.

În ce privește reprezentarea propoziției ipotetice în logica predicatelor ea nu mai prezintă nici o dificultate. Ea va avea forma:

$\forall x\,(O(x) \rightarrow M(x))$, ceea ce înseamnă „pentru orice x dacă x este om atunci x este și muritor".

În general propoziția de tipul A va fi transcrisă prin:

$\forall x\,(S(x) - P(x))$ dacă vrem să indicăm legătura cu schema

$$T\,S - P$$

sau $\forall x\,(F(x) - G(x))$ pentru a folosi numai simbolurile introduse mai sus.

Judecata E cu schema $T\,S + P$ poate fi parafrazată în felul următor: „pentru orice x dacă x este S atunci x nu este P" Reprezentarea unei asemenea judecăți în simbolismul nostru va fi corespunzător:

$$\forall x\,(S(x) \rightarrow \overline{P(x)})$$

Cum trebuie reprezentată judecata I?

Considerăm, de exemplu, judecata particular-afirmativă „unii studenți sînt sportivi".

O vom scrie prescurtat astfel:

$$U\,St - Sp$$

Reprezentarea ei ar părea să fie, ținînd seama de părțile componente și de simbolurile noastre din logica predicatelor, următoarea:

$$\exists\, x\, Sp\,(x)$$

Această „reprezentare" suferă însă de același neajuns ca și „reprezentarea" $\forall x M(x)$, adică se pierde informația conținută de propoziția considerată.

Propoziția noastră „unii studenți sînt sportivi" poate fi parafrazată astfel: „unii indivizi sînt studenți și sportivi".

Or această nouă propoziție poate ușor fi reprezentată astfel:

$$\exists x [St(x) \cdot Sp(x)]$$

În general vom avea pentru schema

$$U S - P$$

reprezentarea:

$$\exists x [S(x) \cdot P(x)] \text{ sau}$$

$$\exists x [F(x) \cdot G(x)]$$

În ce privește judecata de tipul O cu schema $U S + P$, ea poate fi parafrazată astfel: „unii indivizi sînt S și nu sînt P".

Reprezentarea în logica noastră va avea forma:

$$\exists x [S(x) \cdot \overline{P(x)}] \text{ sau}$$

$$\exists x [F(x) \cdot \overline{G(x)}]$$

§ 3. ECHIVALENȚA CUANTORILOR

O primă problemă a calculului predicatelor este aceea a raporturilor dintre cuantori.

Cuantorii pot fi reduși unul la altul cu ajutorul negației. Avem următoarele echivalențe:

$$\forall x F(x) = \overline{\exists x \overline{F(x)}}$$

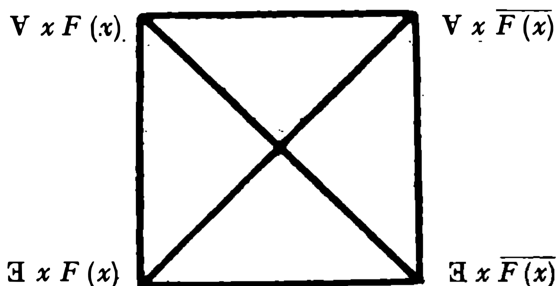
$$\forall x \overline{F(x)} = \overline{\exists x F(x)}$$

$$\exists x F(x) = \overline{\forall x \overline{F(x)}}$$

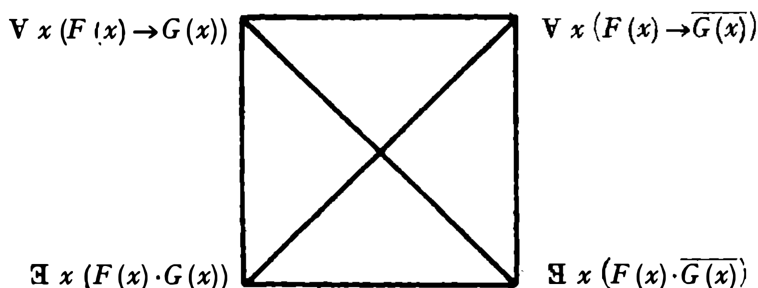
$$\exists x \overline{F(x)} = \overline{\forall x F(x)}$$

Cantitatea judecății poate fi exprimată cu ajutorul unui singur cuantor, iar celălalt poate fi considerat ca o simplă prescurtare.

Corespondentul pătratului logic va avea forma următoare:



Sau dacă avem în vedere „transcrierea" judecăților A, E, I, O în logica predicatelor, vom avea:



Pe baza raporturilor din pătratul logic și a echivalenței cuantorilor putem să găsim forma a două judecăți pornind de la alte două.

Fie judecata de forma:

$$\forall x\ [F(x) \rightarrow G(x)]$$

Pe baza ei conform cu raportul de contradicție formăm negativa:

$$\overline{\forall x\ [F(x) \rightarrow G(x)]}$$

Din aceasta, conform cu echivalența cuantorilor și cu transformările admise în calculul propozițiilor, obținem:

$$\overline{\forall x\,[F(x) \rightarrow G(x)]} = \exists x\,\overline{[F(x) \rightarrow G(x)]} = \exists x\,\overline{[\overline{F(x)} \vee G(x)]} =$$
$$= \exists x\,[\overline{\overline{F(x)}} \cdot \overline{G(x)}] = \exists x\,[F(x) \cdot \overline{G(x)}]$$

Ultima expresie obținută nu este alta decît corespondentul judecății particular-negative.

Fie apoi judecata de forma:

$\exists x\,[F(x) \cdot G(x)]$ (corespondentul judecății particular-afirmative).

Pe baza ei obținem judecata universal-negativă, adică contradictoria ei.

$$\overline{\exists x\,[F(x) \cdot G(x)]} = \forall x\,\overline{[F(x) \cdot G(x)]} = \forall x\,[\overline{F(x)} \vee \overline{G(x)}] =$$
$$= \forall x\,[F(x) \rightarrow \overline{G(x)}]$$

Ultima expresie este tocmai corespondentul judecății universal-negative.

Dacă, dimpotrivă, sînt date judecățile universal-negativă și cea particular-negativă, atunci procesul de obținere a celorlalte două judecăți este analog cu cel de sus.

Într-adevăr, fie dată judecata de forma:
$\forall x\,[F(x) \rightarrow \overline{G(x)}]$. Pe baza ei obținem judecata particular-afirmativă, adică contradictoria ei, în felul următor:

$$\overline{\forall x\,[F(x) \rightarrow \overline{G(x)}]} = \exists x\,\overline{[F(x) \rightarrow \overline{G(x)}]} = \exists x\,\overline{[\overline{F(x)} \vee \overline{G(x)}]} =$$
$$= \exists x\,[\overline{\overline{F(x)}} \cdot \overline{\overline{G(x)}}] = \exists x\,[F(x) \cdot G(x)]$$

Fie apoi dată judecata de forma:

$$\exists x\,[F(x) \cdot \overline{G(x)}]$$

Din aceasta obținem judecata universal-afirmativă, adică contradictoria ei, în felul următor:

$$\overline{\exists x\,[F(x) \cdot \overline{G(x)}]} = \forall x\,\overline{[F(x) \cdot \overline{G(x)}]} = \forall x\,[\overline{F(x)} \vee \overline{\overline{G(x)}}] =$$
$$= \forall x\,[\overline{F(x)} \vee G(x)] = \forall x\,[F(x) \rightarrow G(x)]$$

În exemplele de mai sus negația cădea pe întreaga funcție propozițională, de ex.

$$\overline{F(x)},$$

or acest lucru nu este obligatoriu. Expresia de acest fel *corespunde* cu expresia:

$$S + P$$

din logica tradițională unde negația cade pe cópulă. Tot în logica tradițională însă este permisă deplasarea negației de pe cópulă pe termeni.

Ex. $$S + P = S - \bar{P}$$

Corespunzător cu aceasta, în logica simbolică putem să punem negația numai pe predicate, astfel:

$$\overline{F(x)} = \bar{F}(x)$$

O simplificare se mai poate obține prin suprimarea parantezelor *:

$$\bar{F}(x) = \bar{F}\,x$$

Trecerea negației pe predicat are și un alt sens: în acest fel noi putem exprima judecățile cu termeni negativi și totodată construi întreaga silogistică a lui Fl. Țuțugan bazată pe astfel de judecăți **.

Considerăm seria de judecăți *A* și *I* cu termeni negativi:

universal-afirmative	$T\ S - \bar{P}$	$U\ S - \bar{P}$	particular-afirmative
	$T\ \bar{S} - P$	$U\ \bar{S} - P$	
	$T\ \bar{S} - \bar{P}$	$U\ \bar{S} - \bar{P}$	

Corespondențele lor în logica predicatelor vor fi:

$$\forall x\,(S\,x \rightarrow \bar{P}\,x) \qquad \exists x\,(S\,x \cdot \bar{P}\,x)$$

$$\forall x\,(\bar{S}\,x \rightarrow P\,x) \qquad \exists x\,(\bar{S}\,x \cdot P\,x)$$

$$\forall x\,(\bar{S}\,x \rightarrow \bar{P}\,x) \qquad \exists x\,(\bar{S}\,x \cdot \bar{P}\,x)$$

---

* Aceasta pentru cazul în care predicatul stă pe lîngă o singură variabilă.

** Vezi Fl. Țuțugan, *Silogistica judecăților de predicație*. Editura Academiei R.P.R., București, 1957.

Dacă în logica tradițională judecățile cu termeni negativi păreau oarecum ceva nefiresc și izolat, în logica simbolică ele sînt cu totul firești.

Rămîne să vedem dacă pentru fiecare mod nou construit de Fl. Țuțugan găsim o teză corespunzătoare în calculul predicatelor.

Pe baza acestor forme de judecăți putem forma noi pătrate logice.

Fie să considerăm judecățile de forma:

$$\forall x\ (\bar{S}x \rightarrow Px) \text{ și } \exists\ x\ (\bar{S}x \cdot P\ x)$$

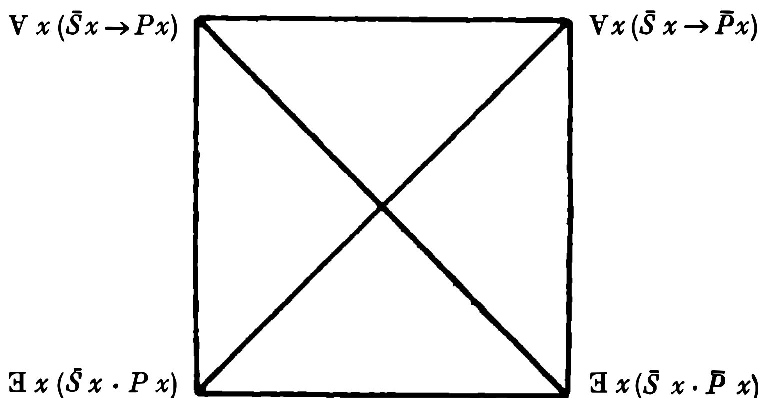
Se cere să aflăm contradictoriile lor:

$$\overline{\forall\ x\ \ (\bar{S}\ x \rightarrow P\ x)} = \exists\ x\ \overline{(\bar{S}\ x \rightarrow P\ x)} = \exists\ x\ \overline{(S\ x \vee P\ x)} = \\ = \exists\ x\ (\bar{S}\ x \cdot \bar{P}\ x)$$

Considerăm apoi expresia $\exists\ x\ (\bar{S}\ x \cdot P\ x)$

$$\overline{\exists\ x\ \ (\bar{S}\ x \cdot P\ x)} = \forall\ x\ \ \overline{(\bar{S}\ x \cdot P\ x)} = \forall\ x\ (\bar{\bar{S}}\ x \vee \bar{P}\ x) = \\ = \forall\ x\ (\bar{S}\ x \rightarrow \bar{P}\ x)$$

Obținem astfel un nou pătrat:



În ce privește poziția negației există încă o posibilitate. Astfel, expresia $\overline{\exists\ x\ F\ x}$ poate fi scrisă: $\overline{\exists}\ x\ F\ x$, deci $\overline{\exists\ x F\ x} \doteq \overline{\exists}\ x\ \ F\ x$

Ideea de predicat în logica tradițională corespunde cu ideea de însușire.

Judecățile în care se reflectă raportul obiect-însușire au fost numite „judecăți de predicație".

Reprezentarea judecăților de predicație în calculul predicatelor a fost dată mai sus. Predicatele-însușiri poartă în logica simbolică numele de „predicate monadice", altfel spus „funcții propoziționale de o singură variabilă". Tot din logica tradițională știm că în afară de judecățile de predicație există așa-numitele judecăți de relație.

Judecățile de relație oglindesc raporturi între două sau mai multe obiecte.

De exemplu, în matematică:

$$2 = 1 + 1$$
$$3 > 1$$
$$1 < 3$$

sînt judecăți de relație. De asemenea, judecăți de relație sînt următoarele:

Ploiești se află la nord de București,

Brașovul se află aproape în centrul țării ș.a.

Reprezentarea unor astfel de judecăți în calculul predicatelor are forma:

$$R\ (x, y),$$

unde R reprezintă relația, iar x și y — obiectele aflate în relație. Relațiile apar în logica simbolică sub denumirea de „predicate poliadice". Astfel, $R\ (x, y)$ este un predicat diadic sau, ceea ce e același lucru, o funcție propozițională cu două variabile.

Expresiile matematice de mai sus pot fi scrise corespunzător în felul următor:

$$\equiv (x, y)$$
$$> (x, y)$$
$$< (x, y),$$

sau dacă pentru fiecare relație dăm un predicat în calculul predicatelor, de exemplu pentru „$\equiv$" scriem I, pentru „$>$"

scriem O_1 şi pentru „<" O_2, atunci avem corespunzător:

$$I\ (x, y)$$
$$O_1\ (x, y)$$
$$O_2\ (x, y)$$

Remarcăm faptul că încercarea de a prezenta judecăţile de relaţie ca judecăţi de predicaţie s-a făcut încă din logica tradiţională. În logica tradiţională însă o asemenea tratare este cel puţin greoaie.

Într-adevăr, să considerăm următorul silogism de tranzitivitate:

$$\frac{\begin{array}{c} a < b \\ b < c \end{array}}{a < c}$$

pe care să încercăm a-l reduce la un silogism simplu de predicaţie.

Figura silogismului la care ar trebui să se reducă acesta este următoarea:

$$\frac{\begin{array}{c} S - M \\ M - P \end{array}}{S - P}$$

Pentru traducerea silogismului de mai sus putem încerca mai multe procedee.

a) Transcriem judecata de forma:

$$x < y,$$

prin

$$x - < y$$

şi vom obţine respectiv pentru *a*, *b* şi *c*:

$$\frac{\begin{array}{c} a - < b \\ b - < c \end{array}}{a - < c}$$

Or, se observă că în acest „silogism" n-avem termen mediu deoarece „< *b*" şi „*b*" nu sînt expresii identice.

b) Putem considera ca termen mediu pe „< *b*" şi vom avea:

$$\frac{\begin{array}{c} a - < b \\ < b - < c \end{array}}{b - < c}$$

Se remarcă însă că expresia „$< b - < c$" este fără sens.

c) Expresia „$< b$" poate fi dezvoltată în felul următor: „ceea ce este mai mic ca b". Expresia „ceea ce este mai mic ca b" are înțeles de sine stătător, ea nu este un nonsens dar prezintă alte inconveniente, anume în anumite cazuri duce la concluzii false.

Într-adevăr, fie cazul particular:

$$\frac{\begin{array}{c}2 < 4\\ 4 < 6\end{array}}{2 < 6}$$

pe care-l transcriem în modul indicat mai sus.

2 este ceea ce este mai mic decît 4
Ceea ce este mai mic decît 4 este ceea ce este mai mic decît 6

---

2 este ceea ce este mai mic decît 6

Expresia „ceea ce este mai mic decît 4" este echivocă, deoarece și 3 este „ceea ce este mai mic decît 4", la fel 1.

Dacă „ceea ce este mai mic decît 4" este precizat ca fiind 1, atunci evident că se obține expresia falsă

$$2 < 1,$$

iar dacă „ceea ce este mai mic decît 4" va fi interpretat ca fiind 3, vom obține expresia adevărată:

$$2 < 3$$

În acest fel expresia „ceea ce este mai mic decît 4" este o expresie echivocă.

d) Am putea apoi trata pe „$<$" ca desemnînd „a fi un număr mai mic decît ..."

Vom avea silogismul:

a este un număr mai mic decît b
Un număr mai mic decît b este un număr mai mic decît c

---

a este un număr mai mic decît c

Se observă însă că nu avem o regulă comună pentru transcrierea unei judecăți de forma $a < b$, deoarece premisa minoră ($b < c$) este transcrisă altfel decît premisa majoră ($a < b$). Va trebui deci să dăm reguli separate pentru transcrierea de propoziții luate separat și pentru propoziții luate în silogism. Or în acest fel lucrurile se complică. Lucru-

rile se complică evident și mai mult cînd vorbim de relații cu mai mult decît doi termeni.

Dimpotrivă, „reducerea" relațiilor la predicate în logica simbolică nu duce la absurdități. Explicația acestui fapt constă în aceea că aci nu este vorba atît de reducerea relațiilor la predicate, cît de reducerea predicatelor și a relațiilor la funcții:

$$F(x), \quad R(x, y)$$

Am vorbit pînă acum de predicate monadice și diadice, dar există și predicate triadice, tetradice și în general n — adice.

$$R(x, y, z, \ldots)$$

Ordinea variabilelor este strict determinată și ea nu poate fi schimbată arbitrar.

§ 5. ORDINEA CUANTORILOR

Să considerăm o expresie diadică:

$$R(x, y)$$

Ea poate fi cuantificată în următoarele feluri:

$$\forall x \quad \forall y \quad R(x, y)$$
$$\forall x \quad \exists y \quad R(x, y)$$
$$\exists x \quad \forall y \quad R(x, y)$$
$$\exists x \quad \exists y \quad R(x, y)$$

Problema echivalenței expresiilor cuantificate multiplu capătă aci aspecte noi.

Este vorba de faptul că ordinea cuantorilor nu este totdeauna indiferentă, altfel spus mulțimea cuantorilor nu se bucură totdeauna de proprietatea comutativității.

Analizăm cele 4 forme de cuantificare de mai sus sub acest aspect.

Expresia $\forall x \; \forall y \; R(x, y)$ este comutativă, altfel spus valoarea ei nu depinde de ordinea cuantorilor, deci:

$$\forall x \; \forall y \; R(x, y) = \forall y \; \forall x \; R(x, y)$$

La fel expresia $\exists x \; \exists y \; R(x, y)$ este comutativă, de unde:

$$\exists x \; \exists y \; R(x, y) = \exists y \; \exists x \; R(x, y)$$

Dimpotrivă, expresiile:

$$\exists x \ \forall y \ R(x, y) \quad \text{şi}$$
$$\forall x \ \exists y \ R(x, y)$$

nu sînt comutative.

Într-adevăr, să presupunem că:

$$\exists x \ \forall y \ R(x, y) = \forall y \ \exists x \ R(x, y)$$

Ca expresie logică ea ar trebui să fie valabilă pentru toate cazurile particulare. Fie cazul în care x, y sînt definite pe mulţimea numerelor întregi, iar R este relaţia $>$

Construim următoarea propoziţie:

„Există un număr întreg x, astfel că pentru orice număr întreg y are loc $x > y$". Această propoziţie este falsă deoarece presupune existenţa „celui mai mare număr întreg". Schimbînd locul cuantorilor obţinem: „Pentru orice număr întreg y există un număr x astfel că are loc $x > y$", propoziţie care este adevărată.

În acest fel echivalenţa de mai sus nu este o expresie adevărată.

Dacă transcriem echivalenţa considerată, prin implicaţie şi conjuncţie obţinem:

$$[\exists x \ \forall y \ R(x, y) \rightarrow \forall y \ \exists x \ R(x, y)] \cdot [\forall y \ \exists x \ R(x, y) \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists x \ \forall y \ R(x, y)]$$

Conform cu cele spuse mai sus este adevărată numai prima parte a acestei conjuncţii:

$$\exists x \ \forall y \ R(x, y) \rightarrow \forall y \ \exists x \ R(x, y)$$

§ 6. LEGILE LOGICII PREDICATELOR

Df. 2. Spunem că o formulă a logicii predicatelor este *lege* dacă şi numai dacă ea este adevărată pentru orice valoare dată argumentelor.

Formula „$\forall x \ F x \rightarrow F y$" este o lege logică deoarece indiferent ce valoare ar lua x ea este adevărată.

Sensul acestei expresii este următorul:

„dacă un predicat determinat F are loc pentru un individ oarecare x, atunci el are loc şi pentru un y oarecare"

Într-adevăr, deoarece x, y sînt ambele definite pe aceeaşi mulţime de valori (iau valori din aceeaşi mulţime),

atunci întrucît un individ oarecare satisface funcţia Fx, deci un individ ales arbitrar, atunci şi un alt individ ales tot arbitrar din aceeaşi mulţime va satisface funcţia Fy

Considerăm predicatul „par". Vom avea expresia $\forall x$ $par\ (x) \rightarrow par\ (y)$.

Valorile lui x şi y se împart în două clase: clasa valorilor care satisfac cele două funcţii unite prin implicaţie, respectiv $par\ (x)$ şi $par\ (y)$, şi clasa valorilor care nu satisfac aceste funcţii.

Ex., orice număr generat prin substituirea pe rînd a numerelor şirului natural în locul lui n din expresia $2\ n$ va satisface cele două funcţii; dimpotrivă, de ex., cele iraţionale nu satisfac funcţiile considerate.

Verificăm. Considerăm pe $x = 2$ şi $y = 4$ şi obţinem:

$$par\ (2) \rightarrow par\ (4),$$

expresie care este adevărată, deoarece propoziţiile „par (2)" şi „par (4)" sînt adevărate, iar implicaţia este şi ea adevărată cînd propoziţiile unite sînt ambele adevărate.

Pentru cazul în care avem $x = 2$ şi $y = 3$,
deci $par\ (2) \rightarrow par\ (3)$,
implicaţia nu este adevărată.

În presupunerea că funcţia „par (x)" este satisfăcută de orice valoare sau, ceea ce e acelaşi lucru, este adevărată independent de valorile argumentului, pentru „par (y)" nu rămîne nici o posibilitate de a deveni propoziţie falsă întrucît y nu poate lua valori diferite de cele cuprinse în sfera lui x.

O problemă filozofică de mare importanţă este următoarea: există oare vreun predicat F, astfel încît oricare ar fi x, Fx să fie o propoziţie adevărată? Pentru logică o asemenea problemă nu prezintă nici un interes, deoarece ea nu se interesează de faptul că ipoteza aleasă este sau nu adevărată, ci de ceea ce decurge logic din această ipoteză. Or, din ipoteza că Fx reprezintă o funcţie adevărată pentru orice valori ale lui x decurge faptul că predicatul reprezentat de „F" are loc şi pentru y care de asemenea este arbitrar ales.

În cele ce urmează dăm lista celor mai importante legi ale logicii predicatelor:

1. $\forall\ x\ \forall y\ F\ (x,y) = \forall\ y\ \forall\ x\ F\ (x,\ y)$
2. $\exists\ x\ \exists\ y\ F\ (x,\ y) = \exists\ y\ \exists\ x\ F\ (x,\ y)$
3. $\exists\ x\ \forall\ y\ F\ (x,\ y) \rightarrow \forall\ y\ E\ x\ F\ (x,\ y)$

4. $(\exists\, x\ F\, x \to p) \to (\forall\, x\ F\, x \to p)$
5. $(p \to \forall\, x\ F\, x) \to (p \to \exists\, x\ G\, x)$
6. $\forall\, x\ (F\, x \to G\, x) \to (\forall\, x\ F\, x \to \forall\, x\ G\, x)$
7. $(\exists\, x\ F\, x \to \exists\, x\ G\, x) \to \exists\, x\ (F\, x \to G\, x)$
8. $\forall\, x\ (p \to G\, x) = (p \to \forall\, x\ G\, x)$
9. $(p \to \exists\, x\ G\, x) = \exists\, x\ (p \to G\, x)$
10. $\forall\, x\ (F\, x \to G\, x) \to (\exists\, x\ F\, x \to \exists\, x\ G\, x)$
11. $(\forall\, x\ F\, x \cdot \forall\, x\ G\, x) = \forall\, x\ (F\, x \cdot G\, x)$
12. $\exists\, x\ (F\, x \cdot G\, x) \to (\exists\, x\ F\, x \cdot \exists\, x\ G\, x)$
13. $(\mathrm{p} \cdot \forall\, x\ G\, x) = \forall\, x\ (\mathrm{p} \cdot G\, x)$
14. $\exists\, x\ (p \cdot G\, x) = (p \cdot \exists\, x\ G\, x)$
15. $(\forall\, x\ F\, x \cdot \forall\, x\ G\, x) \to \exists\, x\ (F\, x \cdot G\, x)$
16. $\forall\, x\ (F\, x \cdot G\, x) \to (\exists\, x\ F\, x \cdot \exists\, x\ G\, x)$
17. $p \cdot \forall\, x\ G\, x \to \exists\, x\ (p \cdot G\, x)$
18. $\forall\, x\ (p \cdot G\, x) \to (p \cdot \exists\, x\ G\, x)$
19. $(p \cdot \forall\, x\ G\, x) \to (p \cdot \exists\, x\ G\, x)$
20. $p \to \forall\, x\ (p \vee G\, x)$
21. $p \to \exists\, x\ (p \vee G\, x)$
22. $(\forall\, x\ F\, x \vee \forall\, x\ G\, x) \to \forall\, x\ (F\, x \vee G\, x)$
23. $\exists\, x\ (F\, x \vee G\, x) = (\exists\, x\ F\, x \vee \exists\, x\ G\, x)$
24. $(p \vee \forall\, x\ G\, x) = [\forall\, x\ (p \vee G\, x)]$
25. $\exists\, x\ (p \vee G\, x) = (p \vee \exists\, x\ G\, x)$
26. $(\forall\, x\ F\, x \vee \forall\, x\ G\, x) \to \exists\, x\ (F\, x \vee G\, x)$
27. $\forall\, x\ (F\, x \vee G\, x) \to (\exists\, x\ F\, x \vee \exists\, x\ G\, x)$
28. $(p \vee \forall\, x\ G\, x) \to \exists\, x\ (p \vee G\, x)$
29. $(p \vee \forall\, x\ G\, x) \to (p \vee \exists\, x\ G\, x)$
30. $\forall\, x\ (F\, x \vee \bar{F}\, x)$
31. $\forall\, x\ F\, x \to F\, y$
32. $F\, y \to \exists\, x\ F\, x$
33. $\forall\, x\ F\, x \to \exists\, x\ F\, x$

La aceste formule adăugăm pe acelea privitoare la echivalența cuantorilor:

34. $\forall\, x\ F\, x = \overline{\exists\, x\ \bar{F}\, x}$
35. $\forall\, x\ \bar{F}\, x = \overline{\exists\, x\ F\, x}$
36. $\exists\, x\ F\, x = \overline{\forall\, x\ \bar{F}\, x}$
37. $\exists\, x\ \bar{F}\, x = \overline{\forall\, x\ F\, x}$

Remarcăm faptul că pentru decizia asupra valorii expresiilor nu există vreun procedeu general în calculul predicatelor așa cum exista în calculul propozițiilor.

Problema deciziei este rezolvată în logica predicatelor numai pentru anumite cazuri particulare.

Neavînd vreun procedeu general de decizie, apelul la interpretare devine mijlocul fundamental de evaluare a expresiilor logice în acest caz.

§ 7. FORMELE NORMALE PREDICATIVE

Conceptul de formă normală din calculul propozițiilor poate fi extins și asupra calculului predicatelor, evident cu modificările necesare.

Există în logica predicatelor două forme normale: forma normală „preliminară" și forma normală Skolem.

Df. 3. Expresia unei funcții este formă normală preliminară dacă îndeplinește următoarele condiții:

1) dacă conține cuantori atunci ei preced orice alt simbol al formulei,

2) negația nu cade pe cuantori, ci numai pe variabilele predicative,

3) domeniul fiecărui cuantor se întinde pînă la capătul formulei,

4) expresia construită cu ajutorul functorilor propoziționali este în forma normală.

Presupunînd că forma în care este dată funcția nu îndeplinește nici una din condițiile formei normale, atunci va trebui să efectuăm următorul proces de normalizare:

a) eliminăm functorii care nu apar în forma normală,

b) deplasăm negația treptat pînă ce ea apare pe variabilele predicative (și pe variabilele propoziționale, dacă acestea apar de asemenea în expresie),

c) schimbăm denumirea variabilelor individuale legate în așa fel ca fiecare cuantor să lege o variabilă deosebită de toate celelalte,

d) scoatem toți cuantorii în față respectînd riguros ordinea în care ei apar în formulă.

Efectuarea operațiilor a) — d) se face conform cu regulile cunoscute anterior.

Forma normală preliminară este echivalentă cu formula inițială.

Ex. 1. Să se aducă la forma normală preliminară funcţia:

$$\forall x\,(F\,x \rightarrow G\,x) \vee \overline{\forall y\,(G\,y \rightarrow F\,y)}$$

Procedăm în felul următor:

a) Mutăm negaţia de pe cuantor pe domeniu şi obţinem:

$$\forall x\,(F\,x \rightarrow G\,x) \vee \exists y\,\overline{(G\,y \rightarrow F\,y)}$$

b) Conform cu legea 25 scoatem cuantorii în faţă păstrîndu-le ordinea:

$$\forall x\,\exists y\,[(F\,x \rightarrow Gx) \vee \overline{Gy \rightarrow F\,y}]$$

c) Aducem expresia din paranteză la forma normală, după regulile cunoscute din logica propoziţiilor.

$$\forall x\,\exists y\,[(\bar{F}\,x \vee G\,x) \vee \overline{(\bar{G}\,y \vee F\,y)}]$$

$$\forall x\,\exists y\,[\bar{F}\,x \vee G\,x \vee (G\,y \cdot \bar{F}\,y)]$$

Suprimăm semnul disjuncţiei şi obţinem:

$$\forall x\,\exists y\,[\bar{F}\,x\,G\,x\,(G\,y \cdot \bar{F}\,y)]$$

Mai departe convenim să aducem expresia la f.n.c.

$$\forall x\,\exists y\,(\bar{F}\,x\,G\,x\,G\,y \cdot \bar{F}\,x\,G\,x\,\bar{F}\,y)$$

Această formulă este formă normală preliminară conjunctivă deoarece îndeplineşte toate condiţiile date în definiţie.

Ex. 2. Să se aducă la forma normală conjunctivă funcţia:

$$\forall x\,F\,x \rightarrow \exists x\,(G\,x \cdot F\,y)$$

a) $\overline{\forall x\,F\,x} \vee \exists x\,(G\,x \cdot F\,y)$

b) $\exists x\,\bar{F}\,x \vee \exists x\,(G\,x \cdot F\,y)$

c) $\exists x\,\exists x\,[\bar{F}\,x \vee (G\,x \cdot F\,y)]$

d) $\exists x\,(\bar{F}\,x\,G\,x \cdot \bar{F}\,x\,F\,y)$, ceea ce reprezintă forma căutată.

Forma aceasta normală va mai purta numele şi de formă normală preliminară.

Vom numi grupul cuantorilor aşezat în faţa expresiilor „prefixul expresiei“ Prefixul format din cuantori diferiţi poate lua diferite forme după modul în care ordonăm cuantorii. O astfel de formă este forma normală Skolem.

Df. 4. Spunem că f. n. a unei funcţii predicative este formă normală a lui Skolem dacă ea este construită astfel că toţi cuantorii existenţiali dacă există ocupă primele locuri. Expresia $\exists x \, \exists x \, \forall z \, R \, (x, \; y, z)$ este în forma normală Skolem. La fel expresia $\forall x \; Fx$ este în forma normală Skolem, însă ea nu conţine cuantori existenţiali.

Dacă funcţia nu este în forma normală Skolem şi nici chiar în forma normală „preliminară“ va trebui mai întîi să găsim forma normală preliminară după care dăm cuantorilor ordinea cerută.

În ce priveşte raportul dintre expresia iniţială şi forma normală Skolem, ele pot să fie echivalente sau nu.

Între aceste două formule există un alt raport constant şi anume sînt *deductiv-echivalente*.

Ce înseamnă că două formule sînt deductiv-echivalente?

Noţiunea de „echivalenţă deductivă“ se defineşte prin raport cu un grup de axiome care stau la baza unui sistem deductiv.

Spunem că două formule A şi B sînt deductiv-echivalente dacă din axiomele sistemului şi formula A se deduce formula B şi, invers, din axiomele sistemului şi formula B se deduce formula A.

Ex. Să se aducă la forma normală Skolem funcţia:

$$\overline{\exists x \, F x \to \forall y \, F y} \to \exists z \, F z$$

Aducem această funcţie mai întîi la forma normală preliminară.

$$\overline{\overline{\overline{\exists x F x} \vee \forall y F y}} \vee \exists z F z$$

$$\overline{\exists x F x} \vee \forall y F y \vee \exists z F z$$

$$\forall x \bar{F} x \vee \forall y F y \vee \exists z F z$$

$$\forall x \, \forall y \, \exists z \, (\bar{F} x \vee F y \vee F z)$$

Această ultimă expresie este forma normală preliminară. De aici obţinem forma normală Skolem:

$$\exists z \, \forall x \, \forall y \, (\bar{F} x \vee F y \vee F z)$$

§ 8. PRINCIPIUL DUALITĂŢII

După cum am văzut, în logica propoziţiilor semnele „&" şi „V" se comportă în anumite situaţii ca semne duale (semne cu proprietăţi analoge). Acelaşi lucru are loc şi în ceea ce priveşte cuantorii: $\forall$, $\exists$.

Conceptul de *dualitate* va căpăta acum o sferă mai largă.

Df. 5. Fiind dată o formulă A care nu conţine alţi functori decît &, V, —, vom spune că o altă formulă A^* este duala lui A dacă ea se obţine din aceasta prin schimbarea fiecăruia din semnele &, V, $\forall$, $\exists$ cu semnul său dual.

De exemplu, duala formulei $\forall x\, F\, x \vee \exists y\, F\, y$ este formula $\exists x F\, x \cdot \forall y\, F\, y$

Principiul dualităţii: dacă A şi B sînt două formule în care nu apar alţi functori decît &, $\vee$, — şi dacă $A \rightarrow B$ şi $A \equiv B$ sînt legi logice, atunci vor fi legi logice şi expresiile:

$$B^* \rightarrow A^* \text{ şi } A^* \equiv B^*$$

Exemplul 1

Formula $\exists x\, (F\, x \cdot G\, x) \rightarrow (\exists x\, F\, x \cdot \exists x\, G\, x)$ este o lege (vezi § 6, legea 12). Din ea deducem conform cu principiul dualităţii legea $(\forall x\, F\, x \vee \forall x\, G\, x) \rightarrow \forall x\, (F\, x \vee G\, x)$ (vezi § 6, legea 22).

Exemplul 2

Formula $(\forall x\, F\, x \cdot \forall x\, G\, x) \equiv \forall x\, (F\, x \cdot G\, x)$ este o lege logică (vezi § 6, legea 11). Din ea deducem conform cu principiul dualităţii formula $(\exists x\, F\, x \vee \exists x\, G\, x) \equiv \exists x\, (F\, x \vee G\, x)$, care de asemenea este lege (vezi § 6, legea 23)[1].

§ 9. CONSTRUCŢIA AXIOMATICĂ A LOGICII PREDICATELOR

Ca şi logica propoziţiilor, logica predicatelor introdusă mai sus poate fi organizată sub formă axiomatică.

Pentru aceasta trebuie să construim un astfel de sistem care pe lîngă axiomele logicii propoziţiilor să cuprindă şi axiome specifice logicii predicatelor.

În cele ce urmează vom da unele informaţii privitoare la sistemul axiomatic al lui Hilbert şi Bernays.

---

[1] Pe lîngă problemele tratate aci, în logica predicatelor apare de asemenea problema aflării tuturor concluziilor din premise date ş.a.

La axiomele hilbertiene din logica propozițiilor (Ax_1 — — Ax_4) se adaugă două axiome specifice logicii predicatelor:

$$Ax_5.\ \forall x F x \rightarrow F y$$

$$Ax_6.\ F y \rightarrow \exists x F x$$

Pe lîngă aceste axiome se introduc patru reguli: regula substituției, regula redenumirii, regula *modus ponens* (regula separației) și regula cuantorilor.

Regula substituției. Această regulă este elaborată pentru cele trei tipuri de variabile existente în logica predicatelor: variabile propoziționale, variabile individuale și variabile predicative.

O condiție generală pe care trebuie s-o îndeplinească orice substituție este aceea de a se obține din nou formulă după operarea substituției (conceptul de formulă a fost definit prin R_1— R_7 din § 1, capitolul de față). O altă condiție generală constă în aceea că substituția se produce peste tot unde apare variabila dată în formula considerată.

(α) *Regula substituției variabilelor propoziționale*

Fiind dată o formulă A care conține toate cele trei tipuri de variabile, noi putem substitui o variabilă propozițională oarecare din această formulă cu o formulă B, dacă formula B nu conține o variabilă individuală care în A este legată.

Exemplu

Considerăm formula:

(1) $(p \vee \forall x G x) = \forall x (p \vee G x)$

Variabila propozițională p poate fi substituită, de exemplu, cu formula $\forall y F y$; de unde obținem:

(2) $(\forall y F y \vee \forall x G x) = \forall x (\forall y F y \vee G x)$

Dimpotrivă, ea nu poate fi substituită cu formula Fx, deoarece x apare în formula (1) ca legată.

Dacă totuși am opera substituția am obține:

(3) $(F x \vee \forall x G x) = \forall x (F x \vee G x)$

Expresia (3) contrazice conceptul de formulă introdus de noi mai sus (respectiv contrazice R_7) și în consecință nu este o formulă.

(β) *Regula substituției pentru variabilele individuale*

Fiind dată o formulă A noi putem substitui o variabilă individuală v_i din această formulă cu o altă variabilă individuală v_j dacă variabila v_j nu apare în A ca variabilă legată.

Exemplu

Considerăm formula:

(1) $\forall x \forall y F(x, y) = \forall y \forall x F(x, y)$

Noi alegem variabila x pentru a o substitui. Ea poate fi substituită cu orice altă variabilă individuală afară de y, de exemplu, z, u,

Pentru cazul în care alegem variabila z, obținem:

(2) $\forall z \forall y F(z, y) = \forall y \forall z F(z, y)$

Variabila y nu poate fi luată pentru substituție deoarece apare legată în formula (1).

(γ) *Regula substituției pentru variabile predicative*

Pentru a formula exact această regulă convenim să scriem variabilele individuale cu ajutorul indicilor, de exemplu $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$

Avînd o formulă A, putem substitui în această formulă o variabilă predicativă F care conține n variabile individuale libere, cu o formulă B, dacă B îndeplinește condițiile următoare:

a) conține cel puțin n variabile libere (poate deci să conțină și mai multe decît n),

b) variabilele individuale libere din B sînt litere deosebite de variabilele legate din A,

c) variabilele individuale care pot să apară în B peste numărul n trebuie de asemenea să nu apară ca legate în A,

d) dacă F se află în domeniul de acțiune al unui cuantor din A, variabila legată de acest cuantor nu intră în B.

Substituția se produce în felul următor.

Considerăm că F se aplică variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deci avem $F(x_1, x_2, \quad x_n)$, iar B conține variabilele $y_1, y_2, \ldots y_n$, deci $B(y_1, y_2, \quad y_n, \ldots)$.

Variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pot să fie și asemănătoare între ele. La fel variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_n$

Variabilele $y_1, y_2, \dots y_n$ sînt înlocuite cu variabilele $x_1, x_2, \quad x_n$ în aşa fel încît fiecare variabilă y_i este înlocuită numai cu o singură variabilă x_i şi se indică riguros cu care anume.

De exemplu, o variabilă y_i va fi înlocuită cu o variabilă x_i care are acelaşi indice cu ea. În cazul nostru, y_1 va fi înlocuită cu x_1, y_2 cu x_2 ş.a.m.d.

Formula nou obţinută $B\ (x_1, x_2, \dots x_n)$ poate fi pusă în locul lui F.

Exemplu

Considerăm formula:

(1) $\exists\, x \,\forall\, y\, F\ (x, y) \rightarrow \forall\, y \,\exists\, x\, F\ (x, y)$

Vrem să înlocuim predicatul F cu formula

(2) $\forall\, z \,\forall\, u\, \bar{G}\ (z, u) \vee \exists\, u \,\exists\, z\, G\ (z, u)$

Notăm formula (2) prescurtat cu
$B\ (z, u)$, unde z şi u sînt cele două variabile pe care le conţine formula (2).

Formula $B\ (z, u)$ îndeplineşte toate condiţiile a) — d) pentru a putea fi substituită predicatului F.

Convenim să înlocuim pe z şi u din B, respectiv cu x şi y din formula (1).

Vom obţine formula:

(3) $\forall\, x \,\forall\, y\, \bar{G}\ (x, y) \vee \exists\, y \,\exists\, x\, G\ (x, y)$

Formula (3) poate fi acum substituită predicatului F din formula (1). Ca urmare obţinem formula:

(4) $\exists\, x \,\forall\, y\, [\forall\, x \,\forall\, y\, \bar{G}\ (x, y) \vee \exists\, y \,\exists\, x\, G\ (x, y)] \rightarrow$
$\forall\, y \,\exists\, x\, [\forall\, x \,\forall\, y\, \bar{G}\ (x, y) \vee \exists\, y \,\exists\, x\, G\ (x, y)]$

Regula redenumirii

Dacă într-o formulă A înlocuim o variabilă cuantificată cu o variabilă diferită de aceasta şi de toate celelalte din formula A, obţinem o formulă nouă. Înlocuirea trebuie făcută prin raport cu sfera de acţiune a cuantorului dat.

Această operaţie poartă numele de operaţia *redenumirii*.

Exemplu

În formula

(1) $\forall\, x F\, x \rightarrow F\, y$

putem redenumi variabila x cu z și obținem:

(2) $\forall z F z \rightarrow F y$

Regula separației (*modus ponens*)

Dacă A și $A \rightarrow B$ sînt formule adevărate, atunci B este o formulă adevărată separat de A

Regula cuantorilor

a) Dacă $A \rightarrow B$ este o formulă adevărată și dacă B conține o variabilă liberă x care nu apare în A, atunci este adevărată și formula $A \rightarrow \forall x B(x)$.

b) Dacă $B \rightarrow A$ este o formulă adevărată și B conține o variabilă liberă x care nu apare în A, atunci este adevărată și formula $\exists x B(x) \rightarrow A$

Exemple de deducție

1. Să se deducă formula $\forall x F x \rightarrow \exists x F x$

Dem. Această formulă se deduce din Ax_5 și Ax_6 cu ajutorul regulii tranzitivității $\frac{A \rightarrow B \text{ și } B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$

Deducția decurge astfel:

$\forall x F x \rightarrow F y$ (Axioma 5)
$F y \rightarrow \exists x F x$ (Axioma 6)
$\forall x F x \rightarrow \exists x F x$ (Concluzia)

2. Să se deducă formula:

$\forall y F y \rightarrow F x$

Pornim de la Ax_5

(1) $\forall x F x \rightarrow F y$

Conform cu regula substituției (β) operăm ySz și obținem:

(2) $\forall x F x \rightarrow F z$

În formula (2) redenumim pe x cu y:

(3) $\forall y F y \rightarrow F z$

La formula (3) aplicăm substituția zSx și obținem:

(4) $\forall y F y \rightarrow F x$ Q.E.D.

§ 10. CALCULUL NATURAL AL PREDICATELOR

Calculul natural al predicatelor ia naștere prin adăugarea la regulile calculului natural al propozițiilor a unor reguli de introducere și eliminare a cuantorilor $\forall$, $\exists$

Reguli de introducere

(1) $\frac{A(t)}{\forall x A(x)}$ (2) $\frac{A(t)}{\exists x A(x)}$

Reguli de eliminare

(3) $\frac{\forall x A(x)}{A(t)}$ (4) $\frac{\exists x A(x)}{A(t)}$

Este important ca cititorul să nu confunde metavariabilele $A, B, C, \ldots$ cu variabilele predicative $F, G, H, \ldots$ În cazul de față $A(x)$ înseamnă „formula A care conține variabila x" și nu „predicatul A este aplicat lui x".

Regulile (2) și (3) pot fi aplicate fără nici o restricție; dimpotrivă, regula introducerii cuantorului universal (1) și regula eliminării cuantorului existențial (4) impun unele restricții.

Vom presupune în primul rînd că variabilele sînt date într-o anumită ordine pe care vom avea grijă s-o respectăm. De exemplu, vom considera ordinea:

$$u, x, y, z, t$$

Expresia $A(t)$ înseamnă rezultatul înlocuirii lui x cu t, oriunde apare x în formula $A(x)$.

Regulile (1) și (4) sînt aplicabile numai cu condiția ca t să desemneze variabila care precede toate variabilele libere din formula $\forall x A(x)$

O dată ce am aplicat regulile (1) și (4) la o variabilă (de exemplu, la t) se spune despre această variabilă că este *limitată* și că o aplicare mai departe a acestor reguli la variabila respectivă nu mai este permisă.

Exerciții

Exemplul 1. Să se demonstreze în calculul natural formula

(1) $\forall x F x \cdot \forall x G x \equiv \forall x (F x \cdot G x)$

Pentru a demonstra formula (1) vom demonstra mai întîi fiecare din cele două implicații în care se desface echivalența.

Considerăm implicația:

(2) $(\forall x F x \cdot \forall x G x) \rightarrow \forall x (F x \cdot G x)$

Dem.

a) $\forall x F x \cdot \forall x G x$ (supoziția)
b) $\forall x F x, \forall x G x$ (eliminarea conjuncției)
c) $F x, G x$ (eliminarea lui $\forall$)
d) $F x \cdot G x$ (introducerea conjuncției)
e) $\forall x (Fx \cdot Gx)$ (introducerea lui $\forall$)

În acest fel am dovedit că $\forall x (F x \cdot G x)$ se deduce din $\forall x F x \cdot \forall x G x$, ceea ce se poate scrie și astfel:

(3) $(\forall x F x \cdot \forall x G x) \vdash \forall x (F x \cdot G x)$

Aplicăm regula introducerii implicației la (3), adică regula $\frac{A \vdash B}{A \rightarrow B}$

și obținem formula (2).

Considerăm apoi implicația inversă:

(4) $\forall x (F x \cdot G x) \rightarrow \forall x F x \cdot \forall x G x$

Dem.

a) $\forall x (F x \cdot G x)$ (supoziția)
b) $F x \cdot G x$ (eliminarea lui $\forall$)
c) $F x, G x$ (eliminarea conjuncției)
d) $\forall x F x, \forall x G x$ (introducerea lui $\forall$)
e) $\forall x F x \cdot \forall x G x$ (introducerea conjuncției)

Avem deci deducția:

(5) $\forall x (F x \cdot G x) \vdash \forall x F x \cdot \forall x G x$

Aplicînd la formula (5) regula introducerii implicației, obținem formula (4).

În continuare, la formulele (2) și (4) aplicăm regula introducerii conjuncției și obținem o implicație reciprocă, ceea ce este tocmai formula (1).

După cîte vedem demonstrația decurge automat prin aplicarea unei anumite reguli la o formulă dată. În paranteză am scris care anume regulă s-a aplicat pentru obținerea formulei respective.

Exemplul 2. Să se demonstreze formula:

(1) $\exists x \forall y F (x, y) \rightarrow \forall y \exists x F (x, y)$

Ordinea variabilelor este cea indicată mai sus

a) $\exists x \forall y F(x, y)$ (supoziția)

b) $\forall y F(x, y)$ (eliminarea lui $\exists$)

(Aci x este limitat)

c) $F(x, y)$ (eliminarea lui $\forall$)

d) $\exists x F(x, y)$ (introducerea lui $\exists$)

e) $\forall y \exists x F(x, y)$ (introducerea lui $\forall$)

Am obținut deci:

(2) $\exists x \forall y F(x, y) \vdash \forall y \exists x F(x, y)$,

de unde prin regula introducerii implicației obținem formula (1).

Se observă că în trecerea de la a) la b) s-a aplicat regula eliminării lui $\exists$ și deci x a fost limitat. În nici o altă formulă care apare în continuare x nu mai este supus aplicației acestei reguli.

§ 11. EXTINDEREA LOGICII PREDICATELOR

Logica predicatelor poate fi extinsă pe mai multe căi: introducerea de noi operatori, cuantificarea predicatelor, introducerea predicatelor de predicate, introducerea de predicate determinate (de ex., predicate aritmetice). Ultima cale de extindere a logicii predicatelor este susținută de către direcția logicistă; dimpotrivă, alți gînditori o combat (de ex., Bocivar).

A. *Operatori noi*

a. *Operatorul descripției* (℩)

Expresiile de felul „Acel scriitor care este autorul romanului «Ion»" sau „acel matematician care este autorul geometriei absolute" se numesc *expresii descriptive* (individuale). În general ele au forma: „acel individ care este..."

Pentru a reprezenta în logica predicatelor astfel de expresii se introduce așa-numitul *operator al descripției*. Acest operator se notează prin litera grecească iota inversată, astfel: ℩ (citește: „acel care").

Vom introduce, de asemenea, semne pentru predicate descriptive (individuale) F_1, F_2... Ca urmare se obțin expresii noi de tipul $\imath x F_1 x$ (citește: „acel x pentru care are loc $F_1 x$"). Expresiile descriptive trebuie deosebite de propozițiile singulare. Expresiile descriptive sînt moduri de a denumi obiectele individuale. Spre deosebire de numele proprii care nu cuprind vreo referire la calitățile individului desemnat, numele descriptive cuprind referiri la asemenea calități (calități care aparțin numai individului desemnat). De ex., „Liviu Rebreanu" este un nume care nu cuprinde asemenea cuvinte care s-ar referi la vreo caracteristică a cunoscutului scriitor. Dimpotrivă, expresia „autorul romanului «Ion»" indică o calitate care aparține numai lui Rebreanu.

Expresiile descriptive pot fi termeni ai unei propoziții dar ele nu sînt încă propoziții.

Pentru a reprezenta simbolic propozițiile cu subiect singular, vom nota indivizii cu $x_1, x_2, \ldots x_n$ (constante individuale).

Vom scrie $Fx_1, Fx_2, \ldots Fx_n$, ceea ce înseamnă „x_1 este F", „x_2 este F" ș.a.m.d.

Constantele individuale, $x_1, \ldots, x_n$, trebuie deosebite de variabilele individuale x, y, z, Primele desemnează indivizi determinați (altfel spus se referă la nume individuale), iar celelalte desemnează un individ oarecare (nu importă care).

b. *Operatorul abstracției* (λ)

Există apoi tipuri de expresie pe care le-am putea numi plurale sau nedefinite. Astfel sînt expresiile: „acei indivizi care sînt locuitori ai orașului X", „acei indivizi care sînt oameni" Pentru a reprezenta expresia: „acei care" introducem semnul λ (lambda). O expresie plurală (nedefinită) va fi notată astfel: $\lambda\, x\, Fx$ (citește: „acei x pentru care F de x").

λ—operator poartă numele și de *operatorul abstracției.*

Dacă după expresia $\lambda\, x\, Fx$ vom pune o constantă individuală, de ex., x_1, atunci vom obține $\lambda\, x\, Fx\, x_1$, expresie care înseamnă „acei indivizi care au însușirea F și x_1 este un astfel de individ",. Astfel spus „$\lambda\, x\, F\, x\, x_1$" desemnează același lucru ca și „$F\, x_1$"

Trecerea de la expresia „$\lambda\, x\, F\, x\, x_1$" la expresia „$F\, x_1$" şi invers poartă numele de *conversie* (conversiune). Bazat pe această conversiune şi pe operaţia de compunere, Alonzo Church a construit un calcul ce poartă numele de „calculul λ—conversiunii" Operaţia de compunere este acea operaţie prin care din două expresii „A" şi „B" obţinem prin simplă alăturare o a treia expresie „AB". De ex., din „F" şi „x" obţinem expresia „Fx". Calculul λ—conversiunii este o ramură a aşa-numitei logici combinatorice (vezi cap. III al acestei cărţi).

c. *Cuantificarea predicatelor*

Uneori vrem să arătăm că o formulă are loc pentru orice semnificaţie a variabilelor predicative, pentru nici una sau pentru unele. În acest caz se impune să cuantificăm şi variabilele predicative. De exemplu, formula Fx nu devine adevărată nici pentru orice x şi nici pentru orice F, deşi există semnificaţii ale lui x şi F pentru care ea poate deveni adevărată. Vom scrie deci

$\exists F \exists x Fx$ (citeşte: „există F şi există x pentru care F de x").

Dacă la expresiile predicative corecte cuantificăm variabilele predicative vom obţine din nou expresii predicative corecte.

De ex.: $\forall F \forall x F x$; $\exists F \forall x F x$; $\forall F F x$

sînt expresii corecte în logica predicatelor. Dacă vrem, de ex., să spunem că orice predicat $R(x, y)$ care exprimă o relaţie de identitate este *simetric*, vom scrie astfel:

$$\forall R \{\forall x \forall y [R(x, y) = \forall F(F x =$$
$$= F y)] \rightarrow \forall x \forall y [R(x, y) \rightarrow R(y, x)]\}$$

Hilbert numeşte un asemenea calcul în care predicatele sînt cuantificate „calcul de treapta a doua"

d. *Predicate de predicate*

În logica predicatelor studiată pînă acum am făcut o separaţie netă între ideea de subiect şi predicat, ca şi între ideea de subiect şi propoziţie. Ştim însă că în gîndirea intuitivă înseşi propoziţiile şi predicatele pot deveni obiecte pentru noi propoziţii. Astfel în propoziţia: „Socrate este

om", noţiunea „om" este predicat, iar în propoziţia: „toţi oamenii sînt muritori" noţiunea „om" este subiect. Tocmai pe această posibilitate de transformare a predicatului în subiect se bazează silogistica aristotelică.

La fel, la rîndul lor propoziţiile pot deveni subiect. Ex., propoziţia: „Socrate este om" devine subiect pentru propoziţia: „«Socrate este om» este o propoziţie adevărată" (avem aici o propoziţie despre altă propoziţie).

Dacă vrem să scriem că o relaţie (de ex., implicaţia) este tranzitivă atunci acest lucru nu va putea fi făcut numai cu ajutorul limbajului utilizat pînă aci. Pe scurt, structura expresiilor: „Muritor (om)", „W (A)" („A este adevărat") „Tr (R)" („R este o relaţie tranzitivă") nu poate fi redată cu limbajul logicii predicatelor cunoscut pînă aci. Avem un domeniu semantic nou şi deci trebuie să introducem noi variabile. Variabilele $F, G, H,\ldots$ aveau ca domeniu de semnificaţie predicatele de indivizi, dar ele nu mai pot fi folosite pentru a desemna şi predicate de predicate de indivizi. Pentru aceasta vom introduce noi simboluri, de ex., literele greceşti:

$$\Phi,\ \Psi,\ldots$$

Vom obţine astfel noi expresii corecte. De ex., Φ (F), Ψ (F), Φ (G),...
Variabilele Φ, Ψ, ... pot fi la rîndul lor cuantificate: $\forall\Phi\Phi(F)$, $\exists\Phi\Phi$ (F),...

Structura expresiilor indicate mai sus: „Muritor (om)", „W (A)", „Tr (R)" poate fi redată acum, prin oricare dintre schemele de funcţii propoziţionale monadice formate cu ajutorul variabilelor Φ, Ψ, ..., de ex., prin Φ (F). La rîndul lor predicatele de predicate de indivizi pot fi transformate de asemenea în subiecte. În acest caz obţinem o nouă dezvoltare a logicii predicatelor. Procedeul poate fi aplicat oricît de mult şi obţinem de fiecare dată o extindere a logicii predicatelor. Apare necesară însă punerea unei anumite ordini în mulţimea variabilelor, se impune o anumită ierarhie. O asemenea ierarhie a fost dată de către B. Russell în *teoria tipurilor logice*. Fiecare expresie a limbii aparţine unui tip logic şi la fel fiecare expresie a ştiinţei logicii. Tipurile sînt date pentru trei categorii de concepte logice: predicate, clase, relaţii.

Dăm în tabelul de mai jos o asemenea ierarhie pentru predicate şi variabilele logicii predicatelor

Tip	Expresii predicative	Variabile
0	indivizi	$x, y, z, \ldots$
1	predicate de indivizi	$F, G, H, \ldots$
2	predicate de predicate de indivizi	$\Phi, \Psi, \ldots$

Conform cu această ierarhie vom spune că „$x, y, z, \ldots$ sînt variabile de tipul O; $F, G, H, \ldots$ sînt variabile de tipul 1; $\Phi, \Psi, \ldots$ sînt variabile de tipul 2, ..."

Dacă avem o expresie α care este formată dintr-un şir de alte expresii (numărul lor este obligatoriu finit) şi dacă cel mai înalt tip care poate fi determinat clasificînd aceste expresii componente are numărul n, atunci expresia α are obligatoriu tipul $n + 1$

Pentru dezvoltarea logicii predicatelor pe calea indicată o stratificare de felul celei indicate de teoria tipurilor este absolut indispensabilă.

Capitolul III

LOGICA CLASELOR. LOGICA RELAȚIILOR. LOGICA COMBINATORICĂ

În capitolele I și II cititorul a făcut cunoștință cu logica propozițiilor și respectiv logica predicatelor. În acest capitol vom da unele informații cu privire la logica claselor, logica relațiilor și logica combinatorică.

§ 1. LOGICA CLASELOR

A. *Limbajul logicii claselor*

Introducînd schemele de funcții propoziționale *Fx*,... *Gx*, ... le-am interpretat ca fiind un mod prescurtat de a scrie expresia „*x* este *F*“,... În caz particular, dacă *F* desemnează predicatul *om*, expresia „om (*x*)“ este un mod prescurtat de a exprima exact același lucru cu expresia „*x* este om“

Schema „*Fx*“ poate însă fi interpretată și altfel, anume: „acele obiecte *x* care au proprietatea *F*“ sau „mulțimea obiectelor care au proprietatea *F*“

În acest caz atenția ne este atrasă asupra faptului că predicatul *F* determină o mulțime de obiecte sau asupra faptului că *din mulțimea obiectelor noi separăm pe acelea care au proprietatea F*.

De exemplu, prin expresia „Om (*x*)“ vom înțelege „acei indivizi care sînt oameni“ Există o deosebire esențială între prima interpretare a schemei „*F x*“ și această a doua interpretare. Într-adevăr, în timp ce din prima schemă putem obține prin substituția variabilelor individuale și a variabilelor predicative propoziții, în a doua interpretare acest lucru nu mai este posibil.

În caz particular este evidentă deosebirea dintre „*x* este om“ și „*x* care este om“

Prima expresie — „*x* este om“ — are întru totul structura unei judecăți; dimpotrivă, expresia a doua — „*x* care este om“ — este pur și simplu un termen al judecății.

Ca şi în logica predicatelor, în cele ce urmează vom presupune că domeniul variabilei x nu este limitat, că el cuprinde orice individ.

Domeniul variabilei x se va mai numi şi „univers"

Orice proprietate separă din univers o porţiune.

Această porţiune din univers separată cu ajutorul unei proprietăţi va fi numită „clasă"

Vom mai spune că „o proprietate determină o clasă" sau că „o clasă este dată cu ajutorul unei proprietăţi". Pentru a distinge între *a vorbi despre clase* şi *a vorbi despre proprietăţi* vom introduce un limbaj special care va fi limbajul logicii claselor.

O clasă determinată va fi *denumită* cu ajutorul termenului care desemnează proprietatea care o separă din univers. Vom avea astfel *clasa oamenilor, clasa plantelor, clasa mineralelor* etc.

1. Literele $X, Y, Z,$ vor desemna o clasă oarecare.

Separînd o clasă X din univers, restul va constitui o nouă clasă numită *clasă complementară.*

Notînd universul cu U putem reprezenta o asemenea clasă astfel:

$$U - X$$

Prin raport cu o clasă oarecare universul va apărea ca fiind format din două porţiuni: clasa determinată de o proprietate dată şi restul sau *clasa complementară.*

Clasa X şi clasa $U - X$ formează împreună universul.

Împreunarea claselor mai poartă numele şi de *reunire* sau *însumare logică,* iar rezultatul acestei reuniri (însumări) se numeşte *sumă logică.*

Analogia cu suma aritmetică merge destul de departe fără ca totuşi să depăşească anumite limite suficient de esenţiale pentru a nu permite confundarea operaţiilor logice cu cele aritmetice. Astfel, împreunarea clasei X cu complementara ei poate fi reprezentată astfel:

$$(U - X) + X$$

Considerînd că $-$ şi $+$ sînt operaţii aritmetice obţinem exact rezultatul despre care am vorbit mai sus:

$$(U - X) + X = U - X + X = U$$

Reunirea poate avea loc și între două clase oarecare, de ex. X și Y. Rezultatul este o a treia clasă Z. Păstrînd analogia vom da o reprezentare aritmetică acestei reuniri:

$$X + Y = Z$$

De exemplu, clasa plantelor și clasa animalelor dau prin reunire clasa viețuitoarelor.

Există și un alt procedeu de a obține clase noi pornind de la anumite clase date, de ex. *suprapunerea* sau *intersecția* a două clase.

Clasa studenților se poate intersecta cu clasa sportivilor și în acest fel rezultă o nouă clasă, anume clasa studenților sportivi.

Notînd pentru un moment intersecția cu semnul × (semnul înmulțirii), vom putea scrie:

clasa studenților × clasa sportivilor = clasa studenților sportivi.

În general, vom putea scrie:

$$X \times Y = XY$$

Notînd cu Z clasa obținută prin intersecție, obținem mai departe:

$$X\,Y = Z$$

Analogia dintre operația intersectării claselor și operația aritmetică a înmulțirii este evidentă.

Tocmai de aceea această operație mai poartă numele și de *produs logic*.

Pentru a nu-confunda operațiile asupra claselor cu operațiile asupra numerelor (numărul fiind doar o caracteristică a unei clase), vom introduce pentru aceste operații semne speciale.

2. Semnul —, așezat deasupra literei (de exemplu, $\bar{X}$), va desemna clasa complementară. Semnul ∪ va desemna reunirea claselor (de exemplu, $X \cup Y$), iar semnul ∩ va desemna intersecția claselor (de exemplu, $X \cap Y$).

Clasele o dată formate pot să se afle în anumite raporturi.

Clasa plantelor, de exemplu, este o clasă mai largă decît clasa coniferelor. La rîndul ei clasa coniferelor este mai îngustă decît clasa plantelor.

Vom spune în acest caz că clasa coniferelor *este cuprinsă* (este inclusă) în clasa plantelor sau că clasa plantelor cuprinde (include) clasa coniferelor.

Acest raport va fi numit raport de *incluziune*.

Raportul de incluziune va fi notat cu semnul $\supset$ sau $\subset$

Faptul că o clasă este inclusă (cuprinsă) în alta va fi notat astfel:

$$X \subset Y,$$

iar faptul că o clasă include (cuprinde) o altă clasă va fi notat astfel:

$$Y \supset X$$

Evident că între expresiile „$X \subset Y$" și „$Y \supset X$" este o identitate totală de conținut, de unde putem scrie:

$$(1) \qquad X \subset Y \equiv Y \supset X$$

Semnul „$\equiv$" va fi folosit în general pentru a marca identitatea dintre două expresii.

O identitate ca aceasta

$$X \equiv Y$$

va fi înțeleasă ca fiind o identitate între două expresii și nu ca o identitate între două clase. În acest fel semnul „$\equiv$" nu aparține logicii claselor, ci metalogicii claselor. Ori de cîte ori îl vom folosi vom înțelege că vorbim despre expresiile logicii claselor și nu despre clase. Într-un scop asemănător putem folosi semnul „$\rightarrow$" De exemplu, $(x \equiv y) \rightarrow \rightarrow (y \equiv x)$. Este vorba de legătura între expresii, nu între clase. Există încă un raport important în logica claselor, raport care însă nu mai stă între clase, ci între clasă și *elementele* ei.

Elementele clasei sînt indivizii din care constă clasa respectivă sau subclasele clasei.

De exemplu, Socrate, Platon, Alexandru, Cezar, Napoleon sînt elemente ale clasei oamenilor.

Despre un element spunem că face (sau nu face) parte din clasa dată. Astfel, Socrate face parte din clasa oamenilor, dar Socrate nu face parte din clasa filozofilor medievali.

Relația între element și clasă poartă numele de *relație de apartenență* și o vom nota cu semnul ε (de la cuvîntul grecesc ἐστί).

Dacă notăm elementele unei clase cu x, y, z, atunci faptul că un element x aparține unei clase X va fi scris astfel:

$$x \varepsilon X \quad \text{(citește: „}x\text{ aparține lui }X\text{")}$$

Dacă notăm clasele cu ajutorul predicatelor care le definesc, F, G, H, atunci putem de asemenea scrie:

$$x \varepsilon F, \ldots *$$

Pentru a deosebi faptul că vorbim despre *toate* elementele clasei, sau despre *unele* elemente ale clasei ne folosim de asemenea de cei doi cuantori $\forall$, $\exists$

Raportul între incluziune și apartenență este dat de următoarea expresie:

$$(2) \qquad X \subset Y \equiv \forall x \, (x \varepsilon X) \rightarrow (x \varepsilon Y)$$

Aceasta înseamnă: a spune că o clasă X este cuprinsă într-o clasă Y este tot una cu a spune că pentru orice element care aparține clasei X este adevărat că el aparține și clasei Y

Din identitatea (2) rezultă că are sens și relația:

$$(3) \qquad X \subset X$$

Relația de apartenență poate să stea și între clase, atunci cînd subclasele unei clase date sînt tratate ca elemente. De exemplu, convenim să socotim clasa oamenilor din punctul de vedere al treptelor de instruire la care participă. Vom obține: clasa preșcolarilor de la grădiniță, clasa elevilor școlii elementare, clasa elevilor școlii medii, clasa studenților...

Fiecare dintre aceste clase este o subclasă a clasei oamenilor care se instruiesc.

Între subclasa elevilor școlii medii și clasa oamenilor care se instruiesc putem să stabilim o relație de apartenență: *subclasa elevilor școlii medii aparține clasei oamenilor care se instruiesc.*

Pe de altă parte, deoarece n-am impus nici o condiție numerică unei clase, putem considera că o clasă poate să constea dintr-un singur element.

De exemplu, clasa autorilor romanului romînesc *Răscoala* constă dintr-un singur individ (element), și anume Liviu Rebreanu.

Din cele spuse mai sus pare să rezulte că deoarece termenii de „clasă" și „element" sînt doar relativi, deosebirea între

* Se observă că oricărei scheme de funcție propozițională (ex. $F x$) îi putem asocia o schemă de apartenență ($x \varepsilon F$) și invers.

relația de apartenență și relația de incluziune, în general, nu mai are sens. Totuși lucrurile nu stau chiar astfel și aceasta este învederat cel mai bine de faptul că relația de apartenență are totuși sens numai între element și clasă, iar relația de incluziune — numai între clasă și clasă. De exemplu, nu putem scrie

$$(a) \quad x \varepsilon y$$

sau

$$(b) \quad X \varepsilon x$$

Aceste relații sînt în general excluse.

Mai mult, o dată cu relația (*a*) este exclusă și relația

$$(c) \quad x \varepsilon x$$

Cu alte cuvinte relația de apartenență nu este reflexivă.

Dimpotrivă, relația de incluziune este reflexivă:

$$X \subset X$$

O altă observație importantă privește din nou conceptul de clasă. Am spus mai sus că în definirea conceptului de clasă nu am impus nici o restricție numerică. De aci decurge că un caz particular al acestui concept trebuie considerat noțiunea de clasă care nu conține nici un element. Astfel, *clasa oamenilor de pe planeta Marte* nu conține nici un element. Asemenea clase poartă numele de *clase vide.*

Din aceleași considerente „universul" apare de asemenea ca un caz particular al clasei. Universul și clasa vidă stau în raport de complementaritate, de aceea folosind analogiile de la început putem scrie:

$$U - U,$$

ceea ce este expresia oricărei clase vide.

Reunirea dintre univers și clasa vidă dă tot univers:

$$U + (U - U) = U$$

Putem duce analogia mai departe și scrie:

$$U - U = 0$$

De aci, $U + 0 = U$

Dacă notăm universul cu cifra 1 atunci egalitățile de mai sus vor putea fi scrise astfel:

$$\bar{1} - 1 = 0$$

$$1 + 0 = 1$$

După cîte se știe această analogie a fost exploatată de George Boole în crearea așa-numitei „algebre logice"

Analogia de mai sus nu trebuie însă să ne inducă în eroare, ea rămîne numai de suprafață și logica nu trebuie confundată din acest motiv cu algebra.

Posibilitățile de investigație pe care le creează această analogie sînt totuși uimitoare. Despre acest lucru am avut ocazie să vorbim atunci cînd am introdus conceptul de interpretare *formal algebrică.*

B. *Logica claselor și logica extinsă a propozițiilor*

Între logica claselor și logica extinsă a propozițiilor există o foarte strînsă legătură, respectiv ele se află în raport de izomorfism[1].

Cele două logici apar în anumite limite ca două interpretări ale unui singur limbaj. Logica propozițiilor apare însă dintr-un anumit punct de vedere ca fiind de un ordin supe-

---

[1] Izomorfismul îl definim în felul următor. Vom considera două sisteme S_1 și S_2 care constau din: obiecte, operații cu obiecte, relații între obiecte, rezultate ale operațiilor cu obiecte. (Obiectele pot să fie de exemplu simbolurile.)

Vom spune că S_1 și S_2 sînt izomorfe dacă și numai dacă:

a) oricărui obiect din S_1 îi corespunde un obiect în S_2 și numai unu, și invers, oricărui obiect din S_2 îi corespunde un și numai un obiect din S_1.

b) oricărei operații din S_1 îi corespunde o operație în S_2 și numai una, și invers,

c) oricărei relații din S_1 îi corespunde o relație în S_2 și numai una, și invers,

d) oricărui rezultat al unei operații în S_1 îi corespunde un singur rezultat în S_2, și invers.

Izomorfismul despre care am vorbit mai sus, este valabil în anumite limite. În vederea determinării acestor limite se impune să studiem mai atent noțiunea de operator.

Dintre operatorii —, $\cap$, $\cup$, $\rightarrow$, $\equiv$ numai primii trei determină formarea de nume pentru clase (exprimă operații de formare a noi clase). Astfel, dacă „X" desemnează o clasă, „$\bar{X}$" desemnează de

rior logicii claselor. Respectiv, orice relație între *expresiile* logicii claselor cade în sfera logicii propozițiilor.

Izomorfismul dintre cele două logici poate fi urmărit în corespondența dintre cele două sisteme de simboluri din tabelul de mai jos.

Logica propozițiilor (extinsă)	Logica claselor
$p, q, r, \ldots$	$X, Y, Z, \ldots$
&	$\cap$
$\vee$	$\cup$
—	—
$\equiv$	$\equiv$
$x, y, z, \ldots$	$x, y, z, \ldots$
$F, G, H, \ldots$	$F, G, H, \ldots$
$Fx, \ldots$	$x \varepsilon F, \ldots$
$\forall$	$\forall$
$\exists$	$\exists$
W	U
F	$\bar{U}$

---

asemenea o clasă; dacă „*X*“ și „*Y*“ desemnează două clase, atunci „$X \cap Y$“ și „$X \cup Y$“ desemnează de asemenea clase.

Dimpotrivă, dacă „*X*“ și „*Y*“ desemnează clase, „$X \supset Y$“ nu mai desemnează o clasă, ci un raport între clase. Cu alte cuvinte, în logica claselor distincția între operație și relație este netă. Expresia „$X \equiv Y$“ desemnează un raport între cele două expresii. Dacă față de expresiile „$\bar{X}$“, „$X \cap Y$“ și „$X \cup Y$“ noi putem aplica pe oricare din operatorii $-$, $\cap$, $\cup$, $\rightarrow$, $\equiv$, față de expresiile „$X \supset Y$“ și „$X \equiv Y$“, nu putem aplica decît operatori propoziționali (&, $\vee$, ...). Aceasta, deoarece în timp ce primele expresii sînt pur și simplu *termeni logici* (corespunzător noțiunii), expresiile ultime sînt judecăți, sau cel puțin au structura unor judecăți („o clasă *X* include o clasă *Y*“).

Distincția aceasta ar putea fi numită o distincție de *ordin* și ea constă în faptul că *a vorbi despre clase* nu e totuna cu a vorbi despre *expresiile care vorbesc despre clase*.

De exemplu, expresia „$(p = q) \rightarrow (q = p)$“ nu poate fi reprezentată în logica claselor numai cu simbolurile date mai sus. Într-adevăr, expresia:

„$(X \equiv Y) \supset (Y \equiv X)$“ nu are sens.

Pentru a putea reprezenta expresia de mai sus ar trebui să introducem în coloana din dreapta functorul propozițional „$\rightarrow$“. Ca rezultat

Izomorfismul merge mai departe în ce privește proprietățile operațiilor și legile logice.

Iată și cîteva legi care-și corespund în cele două logici.

Logica propozițiilor	Logica claselor
$p = p$	$X \equiv X$
$p \cdot \bar{p}$	$X \cap \bar{X}$
$p \vee \bar{p}$	$X \cup \bar{X}$
$p \vee q = q \vee p$	$X \cup Y \equiv Y \cup X$
$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$	$(X \cup Y) \cup Z \equiv X \cup (Y \cup Z)$
$(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$	$(X \cap Y) \cap Z \equiv X \cap (Y \cap Z)$
$p \cdot (q \vee r) = (p \cdot q) \vee (p \cdot r)$	$X \cap (Y \cup Z) \equiv (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
$\overline{p\ q} = \bar{p} \vee \bar{q}$	$\overline{X \cap Y} \equiv \bar{X} \cup \bar{Y}$
$\overline{p \vee q} = \bar{p} \cdot \bar{q}$	$\overline{X \cup Y} \equiv \bar{X} \cap \bar{Y}$

Formulele în logica propozițiilor erau considerate ca exprimînd legi logice dacă indiferent de valoarea de adevăr a argumentelor, valoarea funcției este adevăr.

Formulele în logica claselor sînt considerate adevărate dacă ele sînt adevărate pentru întregul univers.

Am văzut deja că suma claselor X și $\bar{X}$ dă universul, deci

$$X \cup \bar{X} \equiv U$$

---

putem scrie:

„$(X \equiv Y) \rightarrow (Y \equiv X)$" expresie care este corectă. Așadar, pentru a putea traduce orice expresie din limbajul logicii propozițiilor în limbajul logicii claselor, ar trebui să distingem în prima parte a tabelului între operatorii care sînt folosiți pentru a vorbi *despre propoziții* și operatorii care sînt folosiți pentru a vorbi *despre expresiile logice*. În logica propozițiilor cele două funcții sînt îndeplinite de unele și aceleași semne fără ca totuși să dăm peste vreo dificultate. Dimpotrivă, în logica claselor obținem, evident, expresii absurde.

Considerînd semnul „$\rightarrow$" noi putem, de exemplu, să-i punem indicele 1 (deci $\rightarrow_1$) pentru cazul în care îndeplinește prima funcție și indicele 2 (deci $\rightarrow_2$) pentru cazul în care îndeplinește a doua funcție. În acest caz semnul din dreapta $\supset$ ar corespunde cu $\rightarrow_1$, iar pentru semnul $\rightarrow_2$, ar trebui să introducem unul nou sau să-l preluăm chiar pe acesta. Tabelul așa cum e dat în pagina următoare exprimă un izomorfism limitat la prima funcție a simbolurilor (cu excepția simbolurilor „=" „$\equiv$" care îndeplinesc a doua funcție).

Apoi trebuie spus că izomorfismul privește aci logica predicatelor monadice, nu și logica predicatelor *n*-adice. Problema raporturilor dintre logica predicatelor *n*-adice și logica claselor o omitem aci.

Produsul claselor X, $\bar{X}$, dimpotrivă, dă o clasă vidă, deoarece X şi $\bar{X}$ nu se intersectează în nici un punct:

$$X \cap \bar{X} = \bar{U}$$

Folosind interpretarea $U \equiv 1$ şi $\bar{U} \equiv 0$ noi putem scrie cele două formule şi astfel:

$$X + \bar{X} = 1$$
$$X \bar{X} = 0$$

În logica claselor apar aceleaşi probleme care se pun în logica propoziţiilor: problema deciziei, problema echivalenţei a două expresii, problema reprezentării minime etc.

Putem de asemenea aplica procedeul matriceal şi construi forme normale.

§ 2. LOGICA RELAŢIILOR

Unul dintre capitolele logicii neglijat în logica prematematică este logica relaţiilor.

În capitolul II (§ 4) am prezentat un mod de a studia relaţiile, anume conceperea lor ca predicate poliadice.

Noi putem însă crea o teorie specială care să studieze relaţiile *ca relaţii* şi nu ca predicate n-adice.

Această teorie este sub raportul conţinutului mai generală decît toate celelalte teorii logice considerate aci, deoarece ea, studiind proprietăţile relaţiilor în genere, studiază implicit proprietăţile relaţiilor logice. Pe lîngă aceasta, logica relaţiilor dezvăluie natura mai generală a anumitor raporturi logice şi descoperă noi scheme de raţionare.

A. *Limbajul logicii relaţiilor*

Vom nota anumite obiecte care intră în relaţii cu literele

$$x, y, z,$$

Semnificaţia acestor semne va fi concepută ca fiind foarte generală, căci termenul de „obiect" va desemna tot ce poate intra în relaţii, deci obiecte materiale şi obiecte abstracte (concepte, judecăţi etc.). Obiectele x, y, z, vor fi numite şi termenii relaţiei.

O relaţie oarecare va fi notată cu literele

$$P, Q, R,$$

Faptul că două obiecte se află într-o relație R va fi scris astfel:

$$x \, R \, y$$

De exemplu, dacă x este tatăl și y este fiul, atunci relația de la tată la fiu o vom nota astfel

$$x \, T \, y$$

Dacă expresiile noastre asupra relațiilor sînt cuantificate, atunci vom folosi ca și în cazul predicatelor cuantorii $\forall$, $\exists$

Vom avea apoi semnele:

3) | înmulțirea (produsul) relațiilor. De exemplu, $R \mid Q$ (citește „înmulțire de R cu Q")

4) R^n puterea relației ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

5) R^{-1} conversa relației R^1

6) Semnul „$\mid\rightarrow$" va fi folosit pentru a desemna o implicație universală ($F \mid\rightarrow G = \forall \, x \, Fx \rightarrow Gx$)

7) Vor fi apoi incluși toți functorii propoziționali.

Pentru relații n-are este comod să folosim din nou notația pe care am folosit-o în logica predicatelor:

$$R(x, y, z, \ldots)$$

În lucrarea de față ne vom limita la unele chestiuni generale privitoare la relațiile binare.

B. *Proprietăți formale ale relațiilor*

Avînd o relație oarecare

$$x \, R \, y,$$

noi vom numi termenul x *antecedent*, iar termenul y *succedent*.

Df. 1. Numim *domeniu* al relației mulțimea obiectelor care pot satisface antecedentul relației.

Df. 2. Numim *codomeniu* al relației mulțimea obiectelor care pot satisface succedentul relației.

Df. 3. Numim *cîmp* al relației mulțimea obiectelor formată din *domeniul* și *codomeniul* relației.

Să considerăm relația:

x este directorul întreprinderii y

Domeniul relației este format din toți acei indivizi-oameni care în momentul de față sînt directori de întreprinderi.

Codomeniul relației este format din toate întreprinderile existente în momentul de față.

Cîmpul unei relații poate fi *omogen* sau *eterogen*.

Df. 4. Spunem că un cîmp este omogen dacă domeniul și codomeniul conțin obiecte de același tip.

Relația $x > y$ se definește pe un cîmp omogen, și anume mulțimea numerelor.

În cazul în care cîmpul este omogen termenii care intră în relație pot să apară în unele situații ca antecedent, iar în altele ca succedent.

Astfel, numărul 3 apare în relația cu 2 ca antecedent:

$$3 > 2,$$

dar în relația cu 4 el apare ca succedent:

$$4 > 3$$

Df. 5. Spunem că un cîmp este *eterogen* sau *divizat* atunci cînd termenii domeniului și ai codomeniului nu pot să-și schimbe niciodată locul în relație.

De acest fel este relația:

$$x \text{ este soțul lui } y$$

Domeniul relației este format numai din bărbați, iar codomeniul numai din femei.

Printre proprietățile cele mai importante ale relațiilor sînt *reflexivitatea*, *simetria*, *tranzitivitatea* și proprietățile privitoare la corespondența dintre antecedent și succedent.

Df. 6. Spunem că o relație R este *reflexivă* dacă și numai dacă pentru orice obiect x are loc:

$$x \, R \, x$$

Df. 7. Spunem că o relație R între x și y este *simetrică* dacă pentru orice x și pentru orice y are loc:

$$x \, R \, y = y \, R \, x$$

Df. 8. Spunem că o relație R între x, y, z este *tranzitivă* dacă pentru orice x, orice y și orice z are loc:

$$[(x \, R \, y) \cdot (y \, R \, z)] \rightarrow (x \, R \, z)$$

Exemple. Relaţia de identitate ($\equiv$) este o relaţie reflexivă deoarece este adevărat $x \equiv x$. Aceeaşi relaţie este simetrică şi tranzitivă deoarece este adevărat că

$$(x \equiv y) = (y \equiv x) \text{ şi}$$

$$[(x \equiv y) \cdot (y \equiv z)] \rightarrow (x \equiv z)$$

Relaţia de incluziune ($\supset$) este reflexivă — $X \supset X$ şi tranzitivă — $[(X \supset Y) \cdot (Y \supset Z)] \rightarrow (X \supset Z)$.

Din negarea proprietăţilor de mai sus putem obţine o serie de proprietăţi opuse.

Negarea acestor proprietăţi poate fi în general (pentru nici un caz nu are loc proprietatea respectivă), deci o negare *totală*, sau o negare *parţială* (nu pentru toate are loc, dar pot fi unele pentru care are totuşi loc.) Proprietăţile obţinute prin negarea totală a proprietăţii date vor fi numite *ireflexivitate*, *asimetrie*, *intranzitivitate*, iar proprietăţile care conţin o negare parţială vor fi numite *nereflexivitate*, *nesimetrie* şi *netranzitivitate*.

De exemplu, relaţia $<$ este *asimetrică*, deoarece avînd

$$x < y$$

nu vom putea avea

$$x < y = y < x$$

Relaţia $\leqslant$ este *nesimetrică* deoarece în unele cazuri este adevărată expresia:

$$x \leqslant y = y \leqslant x$$

Aceasta este, de exemplu, cazul în care $x = y$

Relaţia ε este ireflexivă şi asimetrică.

Într-adevăr, dacă avem $x \varepsilon X$ nu vom putea niciodată să avem $x \varepsilon x$ şi nici $x \varepsilon X = X \varepsilon x$

Df. 9. O relaţie este *univocă* dacă şi numai dacă fiecărui antecedent îi corespunde un şi numai un succedent.

De exemplu, relaţia „x este satelitul planetei y“, este o relaţie *univocă* deoarece fiecare satelit este satelit al unei singure planete. Pe de altă parte, una şi aceeaşi planetă poate avea mai mulţi sateliţi.

Df. 10. O relaţie este *biunivocă* dacă fiecărui antecedent îi corespunde un singur succedent şi fiecărui succedent îi corespunde un singur antecedent.

Să presupunem că x, y, z desemnează numere naturale întregi diferite de 0

Între aceste numere se stabilește relația „...urmează imediat după..."

Oricare ar fi acel număr care va juca rol de antecedent el nu poate să aibă decît un singur succedent și invers.

Exemplu 3 pentru 2
4 pentru 3
5 pentru 4

Nu există două numere după care un astfel de număr dat să urmeze imediat și nu există două numere care să urmeze imediat după un număr dat.

C. *Operații asupra relațiilor*

Ca și în cazul propozițiilor și claselor, relațiile pot fi supuse unor anumite operații.

Amintim două operații: conversiunea și „înmulțirea" sau multiplicarea.

Df. 11. Numim *conversiune* operația de trecere de la o relație $x\ R\ y$ la relația $y\ R\ x$

Expresia „$y\ R\ x$" va fi numită *conversa* expresiei „$x\ R\ y$"

Exemplu. Dacă x este fratele lui y, atunci și y este fratele lui x

Df. 12. *A înmulți* o relație $x\ R\ y$ cu o relație $y\ Q\ z$ înseamnă a stabili o a treia relație $x\ P\ z$ (deci între antecedentul primei relații și succedentul celei de-a doua relații).

Exemplu. Dacă x este tatăl lui y și y este soțul lui z, atunci x este socrul lui z

Schematic vom avea: $[(x\ T\ y)\ (y\ B\ z)] \rightarrow (x\ S\ z)$

D. *Legi și definiții*

1. $(R_1 | R_2) | R_3 = R_1 | (R_2 | R_3)$ (asociativitate)
2. $R | (Q_1 \vee Q_2) = (R | Q_1) \vee (R | Q_2)$ (distributivitate)
3. $(Q_1 \vee Q_2) | R = (Q_1 | R) \vee (Q_2 | R)$ (distributivitate)
4. $R\ (Q_1 \cdot Q_2) \mapsto (R | Q_1) \cdot (R | Q_2)$ (distributivitate)
5. $(Q_1 \cdot Q_2) | R \mapsto (Q_1 | R) \cdot (Q_2 | R)$ (distributivitate)

Dacă relația se înmulțește cu sine atunci obținem puteri ale relațiilor

$$R \mid R = R^2$$

$R^3 = R^2 \mid R$ ş.a.m.d. (R° înseamnă că termenii relației sînt identici).

6. $R^{-1} \mid R^{-1} = (R^{-1})^2 = (R^2)^{-1} = R^{-2}$
7. $R^1 = R$
8. $(R^{-1})^{-1} = R$ (conversa conversei lui R este R însuşi)
9. $(R \vee Q)^{-1} = R^{-1} \vee Q^{-1}$
10. $(R \cdot Q)^{-1} = R^{-1} \cdot Q^{-1}$
11. $R^m \mid R^n = R^{m+n}$ (Exemplu: $R^{\circ} \mid R = R$, $R^1 \mid R^2 = R^3$)
12. $(R^m)^n = R^{mn}$ (Exemplu: $(R^3)^4 = R^{12}$)
13. $(R^{-m})^n = R^{-mn}$
14. Sym $(R) = R \mapsto R^{-1}$ (simetrie)
15. As $(R) = R \mapsto \bar{R}^{-1}$ (asimetrie)
16. Tranz $(R) = R^2 \mapsto R$ (tranzitivitate)
17. Intranz $(R) = R^2 \mapsto \bar{R}$ (intranzitivitate)
18. Refl $(R) = R^{\circ} \mapsto R$ (reflexivitate).

§ 3. LOGICA COMBINATORICĂ

Limbajurile logice folosite pînă acum utilizează toate ideea de *variabilă*. Folosirea variabilelor cere dezvoltarea unor reguli de substituție. Operația substituției este o operație destul de complicată, după cum se poate constata chiar din cele expuse de noi anterior.

Pe de altă parte, operațiile logice studiate sînt departe de a fi cele mai simple. Există operații mult mai primitive față de care operațiile logice cunoscute apar ca nişte cazuri particulare. Nevoia de a depăşi dificultățile puse de substituție cît şi posibilitatea de a găsi operații mai simple l-au împins pe M. Schönfinkel (1924), apoi pe H. B. Curry la încercarea de a construi un calcul logic în care pe de o parte se folosesc numai constante, iar pe de altă parte se foloseşte o singură operație.

Avînd diferite formalisme logice şi studiind operațiile formale care au loc în aceste formalisme se descoperă operații mai primitive — de ex. juxtapunerea de obiecte (desene),

altfel spus *aplicarea* unui simbol la altul. Aplicarea de simboluri poate fi apoi de mai multe feluri. A descoperi aceste moduri ale *aplicației* în formalismele logice, aceasta este sarcina logicii combinatorice.

Drumul parcurs de logică pentru a ajunge la logica combinatorică poate fi schițat astfel:

1) logica generală (studiul raporturilor dintre propozițiile luate cu sens),

2) logica matematică (studiul funcțiilor logice),

3) formalismele logice (sisteme de calcul logic în care se face abstracție de interpretare),

4) logica combinatorică (studiul operațiilor materiale care au loc în formalismele logice).

Știința este reflectare, și anume reflectarea proprietăților, raporturilor sau proceselor care au loc în anumite domenii de obiecte.

Logica combinatorică studiază tocmai procesele (operațiile) materiale care au loc în formalismele logice. Ea fixează pentru aceste operații anumite simboluri care poartă numele de „combinatori" sau pur și simplu de „operatori"

Acești operatori sînt *compozitorul elementar* notat cu B, *permutatorul* notat cu C, *repetitorul* notat cu W, *eliminatorul* notat cu K și *identificatorul* notat cu I.

Fie obiectele notate prin a, b, c.

Operatorii vor fi definiți astfel:

(1) $Ia = a$
(2) $B\ a\ b\ c = a\ (b\ c)$
(3) $C\ a\ b\ c = a\ c\ b$
(4) $W\ a\ b = a\ b\ b$
(5) $K\ a\ b = a$

Așadar, operațiile sînt: *a identifica (1), a constitui (2), a schimba (3), a repeta (4) și a suprima (5).*

Evident că aceste operații sînt procese mai elementare decît «a normaliza», «a deduce», «a calcula» etc.

Față de operația de constituire (2), operațiile de *asociativitate* și *de adăugare a unei litere* constituie doar cazuri particulare.

Logica combinatorică a fost constituită ca sistem axiomatic.

Acest sistem cuprinde pe lîngă definițiile 1) — 5) un șir de 15 axiome asupra combinatorilor; 4 reguli de inferență și o regulă specială (regula π).

Semnul π intervine într-o axiomă specială asupra lui „=“
(6) π $(W\ (C\ =))$.

Dăm cîteva exemple de axiome şi reguli de inferenţă:

(7) Ax.B:$C\ (BB\ (BBB))\ B = B\ (BB)\ B$
(8) Ax.C:$C\ (BB\ (BBB))\ C = B\ (BC)\ (BBB)$
(9) Ax.W:$C\ (BBB)\ W = B\ (BW)\ (BBB)$
(10) Ax.K:$C\ (BBB)\ K = B\ (BK)\ I$
(11) Ax.BC:$BBC = B\ (B(BC)\ C)\ BB$
(12) Ax.BW:$BBW = B\ (B\ (B\ (B\ (BW)\ W)\ (BC))\ B(BB))B$
(13) Ax.BK: $BBK = BKK$
(14) Ax.CC: $BCC = B\ (BI)$

Reguli de inferenţă

(1) De la $a = b$ se poate infera $b = a$,
(2) De la $a = b$ şi $b = c$ se poate infera la $a = c$

Logica combinatorică permite rezolvarea la un nivel mai elementar a anumitor probleme ale formalismelor logice.

Ea deschide evident noi perspective dezvoltării logicii. Din punct de vedere filozofic ea indică un nou nivel al cunoaşterii — *cunoaşterea posterioară oricărei abstracţii*, cunoaşterea care studiază *înseşi procesele materiale cu ajutorul cărora se realizează abstracţia*.

Formalismele se constituie pe baza interpretării (a conţinutului ştiinţei), logica combinatorică se constituie pe baza formalismelor.

Capitolul IV

ISTORIA LOGICII MATEMATICE

Scopul acestui capitol nu este de a da o expunere exhaustivă a istoriei logicii matematice, ci de a marca principalele momente ale acestei istorii.

§ 1. ETAPA PREGĂTITOARE

1. Evoluţia logicii matematice trebuie urmărită sub două aspecte:

a) sub aspectul conţinutului (un anumit salt în abstracţie caracterizat prin introducerea „funcţiilor logice"),

b) sub aspectul dezvoltării calculului logic (simbolismul logic şi transformările logice).

Procedeul simbolic poate fi semnalat chiar în opera lui Aristotel, *Organon*.

Logicianul polonez Jan Lukasiewicz a încercat să reconstituie chiar un calcul logic aristotelic. Ce-i drept, în opera lui Aristotel găsim o „logică deductivă" (= expusă deductiv), totuşi nu acest aspect domină opera Stagiritului.

Principalul în opera lui Aristotel îl constituie existenţa unui şir de „figuri ale silogismului" şi „moduri", ceea ce în limbajul contemporan am numi „schema de deducţie" (Gentzen) sau „reguli de deducţie".

Din punctul de vedere al treptelor logicii, logica lui Aristotel este o logică în primul rînd a judecăţilor de predicaţie. Notaţia simbolică joacă un rol foarte limitat în această logică.

Adevăratul început al dezvoltării logicii simbolice are loc o dată cu introducerea primelor funcţii logice („funcţii de adevăr"), fapt care a avut loc în şcoala megaro-stoică.

2. Şcoala megaro-stoică îşi desfăşoară activitatea în principal în secolele IV-III î.e.n. Dintre reprezentanţii ei, care au contribuit în mod deosebit la dezvoltarea logicii, Diodor Kronos, Philon din Megara şi Chrysipp trebuie amintiţi în primul rînd.

Problema cea mai disputată de către stoici a fost problema propozițiilor condiționale (implicația). Discuțiile deveniseră atît de aprinse, încît după vorba unui comentator „croncăneau corbii pe acoperișuri" cînd era vorba de implicație.

Introducerea „implicației materiale" (implicația ca funcție de adevăr) constituie, alături de introducerea ideii de funcție de adevăr și de limbajul simbolic, cel mai important lucru pentru construcția calculului logic al propozițiilor.

Implicația, așa cum o cunoaștem din calculul propozițiilor, a fost definită de către Philon. El spunea că propoziția condițională este totdeauna adevărată, cu excepția cazului în care antecedentul este adevărat, iar consecventul este fals.

Philon dă următoarele exemple de propoziții condiționale care sînt caracterizate prin una din cele patru situații de adevăr din schema implicației:

$$
\begin{array}{llll}
W & W & - & W \\
W & F & - & F \\
F & W & - & W \\
F & F & - & W
\end{array}
$$

a) „Dacă este ziuă atunci este lumină" (*WW*/*W*).
b) „Dacă este ziuă atunci este și noapte" (*WF*/*F*).
c) „Dacă pămîntul zboară atunci el există" (*FW*/*W*).
d) „Dacă pămîntul zboară atunci are aripi" (*FF*/W).

Philon păstrează evident o anumită legătură între intenția propoziției și structura ei de adevăr, fapt care ne face să credem că deși a definit propozițiile compuse numai prin valorile lor, el *n-a făcut totuși abstracție de intenția propoziției*.

Sub raportul organizării, logica stoică este construită ca un sistem de scheme de deducție, nelipsind elementele de organizare deductivă (axiomatică).

3. Scolasticii — în special Occam, Albert Saxonul, Paulus Venetus, Duns Scott, Buridan ș.a. — au pregătit de asemenea apariția logicii simbolice.

Este vorba în primul rînd de dezvoltarea semanticii logice: teoria supozițiilor, teoria paradoxelor ș.a.

Una dintre primele încercări de fundamentare a calculului logic a fost făcută de Raimundus Lullus în *Ars magna et ultima*. În concepția lui Lullus gîndirea este un fel de proces combinatoric. În acest proces se pleacă de la semnele

(simbolurile) unor idei primitive și cu ajutorul regulilor de combinare se obțin toate celelalte idei (ideile compuse). Lullus propune chiar și o mașină de gîndit.

Imaginația lui Lullus ne apare în mare măsură utopică, fără ca totuși să negăm existența unei intuiții geniale.

4. Din punct de vedere metodologic, logica matematică a fost pregătită și de R. Descartes prin concepția sa asupra unei *Mathesis universalis*. Descartes ia ca model de gîndire matematica fără ca totuși să identifice întregul conținut al gîndirii cu cel matematic. *Matematizarea gîndirii în concepția lui Descartes înseamnă doar desfășurarea procesului gîndirii după modelul gîndirii matematice.*

Descartes este însă dacă nu un adversar al logicii formale, cel puțin un subestimator, fapt care face ca în mod direct el să nu aibă nici o contribuție la dezvoltarea logicii.

5. Unele tentative de dezvoltare a logicii simbolice se găsesc în logica lui Leibniz. Ca și Descartes, Leibniz își pune problema construirii procesului gîndirii după model matematic. Pentru aceasta el propune și generalizarea limbajului simbolic. Influențat în parte de Lullus, Leibniz a încercat să construiască *arta de a calcula* în orice domeniu.

Construcția unei asemenea arte trebuia făcută în două etape:

a) constituirea unui limbaj simbolic universal *(characteristica universalis)*.

b) constituirea calculului gîndirii *(calculus ratiocinator)*.

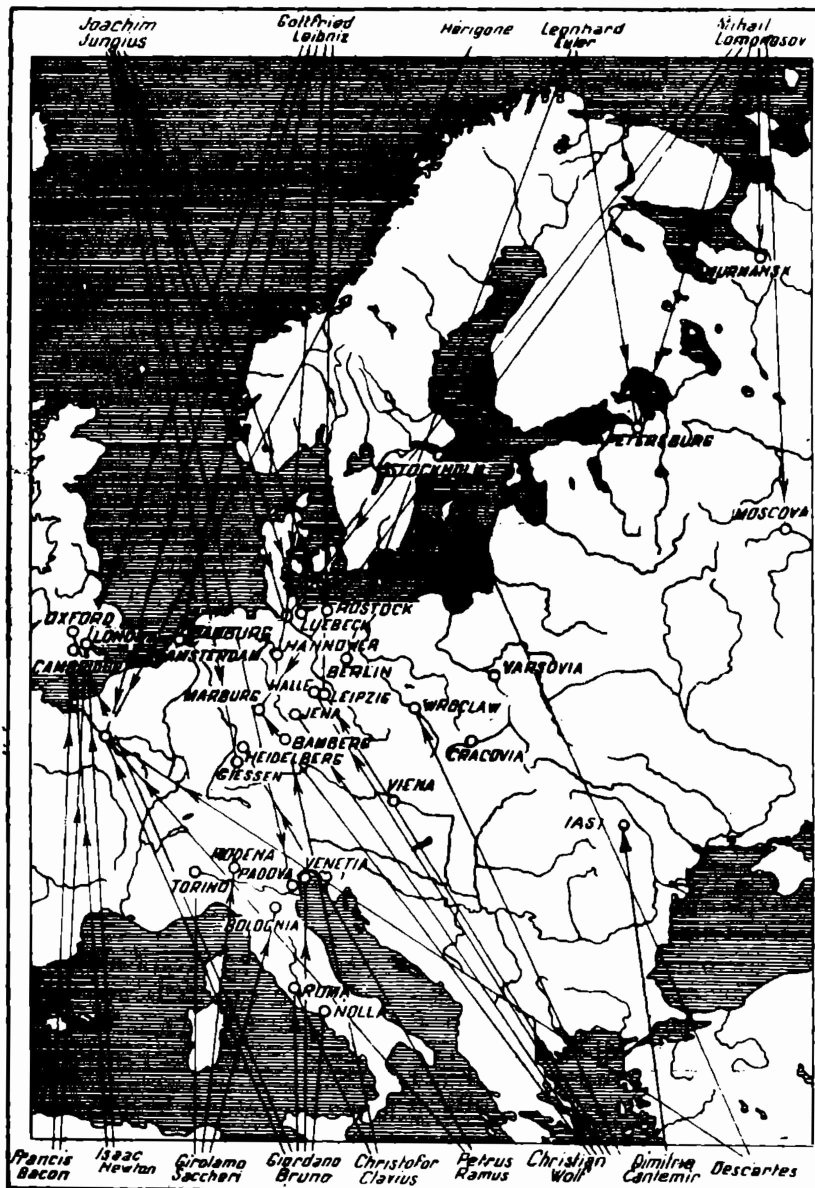
Știința astfel constituită urma să poarte numele de *Mathesis universalis*.

Mathesis universalis ar consta din două părți: *Ars combinatorica* (calculul calitativ) și *logistica* (algebra).

Unificarea gîndirii se face sub două aspecte: logic și calculatoriu.

Leibniz nu reduce matematica la logică, el arată numai că „logica geometrilor“ nu este decît „un caz particular al logicii generale“. De asemenea, el nu reduce logica la matematică. Calculul este o formă a gîndirii care poate fi extinsă și la alte domenii decît cel matematic.

În ce privește contribuția de fapt a lui Leibniz la dezvoltarea logicii simbolice, ea apare mai ales în unele aspecte particulare. După părerea noastră însă contribuția lui Leibniz la dezvoltarea logicii are loc mai mult pe linia logicii generale și nu a celei simbolice.



Logica în perioada Renaşterii şi modernă

(După H. Greniewski)

Ce-i drept, Leibniz are multe reflecții geniale și fragmente care pregătesc terenul viitoarei logici, totuși este exagerat să fie numit „întemeietorul logicii matematice" În logicalui Leibniz se pierde chiar și aspectul logic-funcțional descoperit de stoici.

Prin tendință Leibniz este un logician deosebit de Aristotel, în fapt însă el rămîne în cea mai mare parte un aristotelic.

Leibniz este alături de stoici cel mai mare precursor al logicii matematice, fără a fi totuși „părintele" ei.

Etapa pe care o încheiem cu Leibniz o vom numi „etapa pregătitoare".

Descoperirile principale ale acestei etape sînt:

a) ideea de funcție logică (funcție de adevăr),
b) ideea de calcul logic,
c) ideea logicii „deductive" (axiomatice),
d) diferite legi ale calculului propozițiilor.

§ 2. ETAPA SISTEMATICĂ. ÎNTEMEIEREA LOGICII MATEMATICE

George Boole. Întemeietorul primului calcul logic și deci și al logicii matematice este logicianul irlandez George Boole (1815—1864), tatăl cunoscutei scriitoare Voinitch. Principalele lucrări de logică ale lui G. Boole sînt: *The Mathematical Analysis of Logic* (1847), *The Calculus of Logic* (1848) și *Investigation of the Laws of Thought on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probability* (1854). Ultima lucrare este o sinteză a întregii logici booleene.

Este greu să cuprindem aici, fie și într-o formă succintă, întreaga contribuție adusă de G. Boole la dezvoltarea logicii simbolice. Nu numai calculul, dar și teoria calculului ocupă un loc de seamă în această operă.

Punctul de plecare în ce privește construcția calculului logic și în același timp principiile oricărei teorii științifice a logicii simbolice sînt cuprinse în următoarele rînduri magistrale:

„1) simbolurile au o interpretare și legile de combinare a lor sînt corect determinate din interpretare,

2) procesul de rezolvare (demonstrare) este efectuat conform cu legile determinate mai înainte și fără a ține seama de interpretare,

3) rezultatul final să fie interpretabil în conformitate cu sistemul de interpretare dat la început".

Logica construită de Boole este în primul rînd un „calcul al claselor". Remarcabil este faptul că G. Boole pleacă în construcția calculului logic nu de la stoici, ci de la Aristotel.

Procedeul de calcul rămîne pentru Boole silogismul, dar silogismul înțeles formal: *ca procedeu de eliminare a termenului mediu*.

Dăm mai jos un fragment din acest calcul logic.

1. *Simbolurile*

a) $x, y, z,$ (obiecte),
b) $+, -,$ (operații ale intelectului),
c) $=$ (relația de identitate),
d) 1, 0 (două simboluri care au semnificații constante).

2. *Legi ale simbolurilor*

1) $y\, x = x\, y$
2) $x^2 = x$
3) $x + y = y + x$
4) $z\,(x + y) = z\, x + z\, y$
5) $x - y = - y + x$
6) $z\,(x - y) = z\, x - z\, y$

3. *Axiome*

1) Dacă $x = y$, atunci $z\, x = z\, y$
2) Dacă $x = y$, atunci $x + z = y + z$
3) Dacă $x = y$, atunci $x - z = y - z$

Simbolismul acesta este suficient pentru următoarea interpretare:

1) $x, y, z, \ldots$ clase
2) $+$ disjuncția claselor,
$-$ operația „exceptînd"
3) $=$ identitatea claselor,
4) xy (aplicarea simultană, recunoaștem aci conjuncția, deși Boole nu vorbește despre acest lucru),
5) 1 este „universul", iar 0 este „nimicul".

Pentru a cuprinde și logica „propozițiilor", și anume logica „propozițiilor primare" (de fapt un fel de logică a judecăților de predicație sau o logică a termenilor), și logica

„propozițiilor secundare“ (logica propozițiilor ca atare), Boole schimbă interpretarea semnelor și completează limbajul.

Pentru logica „propozițiilor primare“ (logica termenilor), Boole introduce în plus simbolurile:

1) $X, Y, Z,$ (termeni),

2) v (simbolul clasei nedefinite).

Semnele x, y, z înseamnă de astă dată nume sau calități ale claselor de obiecte, iar „+“ colecție de porțiuni din univers.

Pentru a cuprinde logica „propozițiilor secundare“ este importantă o anumită interpretare a simbolurilor de mai sus:

1) $X, Y, Z,$ propoziții elementare (primare),

2) $x, y, z,$ porțiuni de timp,

3) + agregat de porțiuni de timp,

4) 1 este eternul, iar 0 este nimicul temporal.

Printre propozițiile secundare intră și propozițiile care vorbesc despre adevărul sau falsul propozițiilor primare.

Faptul că o propoziție elementară X este adevărată, adică „X este adevărat“, se reprezintă astfel: $x = 1$, iar propoziția de tipul „X este fals“ se reprezintă astfel: $x = 0$

În acest fel simbolurile 1 și 0 sînt puse în legătură directă cu conceptul de adevăr și respectiv de fals.

Trecerea de aci la viitorul calcul logic pare în acest fel doar ca o chestiune de efort.

Calculul logic booleean se bazează pe următoarele procedee:

1) eliminarea (ex. prin introducerea lui 1 și 0 în locul lui $x, y, z, \ldots$),

2) reducerea (un grup de „ecuații logice“ poate fi redus la altul),

3) abrevierea (ex. prin introducerea conceptului de funcție $f(x)$).

Dăm un exercițiu simplu de calcul în logica booleeană.

1. Arătăm că în logica lui Boole are loc expresia $x(1 - x) = 0$ (legea noncontradicției sau în terminologia lui Boole „principiul dualității“).

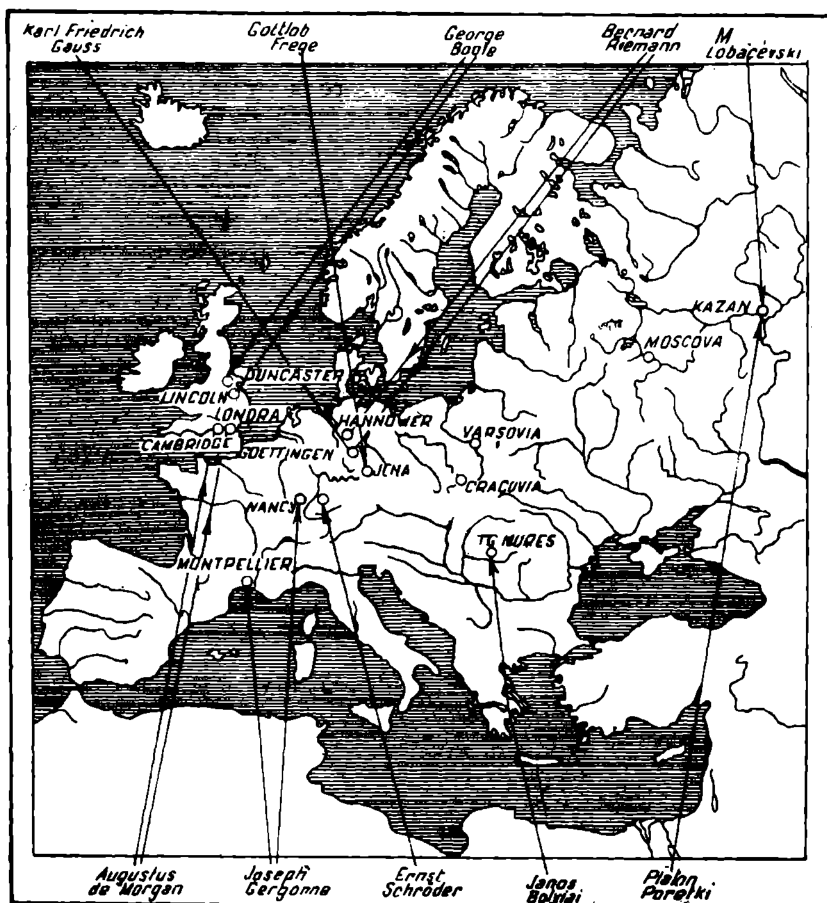
Demonstraţia formulei $x(1 - x) = 0$ se face simplu pornind de la $x^2 = x$. Din

1. $x^2 = x$ prin trecerea lui x^2 în membru doi, comutarea membrilor şi schimbarea semnului obţinem:

2. $x - x^2 = 0$, de unde prin scoaterea în factor comun obţinem:

3. $x(1 - x) = 0$

Calculul logic al lui Boole este destul de greoi; el a fost mult perfecţionat de logicienii următori.



Logica matematică

(După H. Greniewski)

Augustus de Morgan (1806—1878).

Contemporan cu G. Boole, Augustus de Morgan încearcă aproape concomitent cu acesta să construiască un calcul logic.

Principalele lucrări ale lui de Morgan sînt *Formal Logic, Budget of Paradoxes* (Logica formală, sac cu paradoxe) și *Syllabus of a Proposed System of Logic* (Încercare a unui sistem de logică).

De Morgan introduce o simbolică greoaie (1847) pe care o modifică mai tîrziu (1856) fără însă a reuși s-o facă mai comodă. În principal el se ocupă de logica judecăților de predicație cu scopul de a perfecționa silogistica aristotelică. În această logică el cuantifică și predicatele (ca și Hamilton) și introduce, pe lîngă termenii pozitivi, și termeni negativi care în logica tradițională interveneau numai în cazuri singulare.

Simbolismul lui de Morgan

1) termenii pozitivi $X, Y, Z, \ldots,$

2) termenii negativi (corespunzători) $x, y, z, \ldots,$

3) Din termenii $X, Y, Z, \ldots$ formăm enunțuri de felul A_1, E_1, I_1, O_1, iar din termenii $x, y, z,$ formăm enunțuri „contrarii": A', E', I', O'

Ex. A_1: „Orice Y este Z",
A': „Orice y este z"

4) Prescurtări:

$X)\ Y$ „Orice X este Y"

$X.\ Y$ „Nici un X nu e Y"

$X:\ Y$ „Unii X nu sînt Y"

$X\ Y$ „Unii X sînt Y"

Semnul „)" arată că termenul spre care este deschis este distribuit (universal cuantificat).

În 1858 el modifică întrucîtva această simbolică.

1) Semnele $Y, X, Z,$ $x, y, z,$ păstrează semnificația anterioară.

2) Semnul „)" așezat astfel „$X)$" este „paranteza inclusivă" și indică universalitate.

3) Semnul „(" așezat astfel „$X($" este paranteză „exclusivă" și indică particulara.

4) Perechea sau absența punctelor, ex. „$X : Y$", „ XY", indică faptul că avem o judecată afirmativă.

5) Punctele neperechle (ex. „$X.Y$") indică faptul că avem o judecată negativă.

Transcrierea judecăților A, E, I, O va fi:

A_1: $X)Y$, $X))Y$ (Orice X este Y)

A': $x)y$, $x))y$ sau $Y)X$ sau $X((Y$ (Orice Y este X)

E_1: $X)y$ sau $X.Y$, $X))y$ sau $X).(Y$ (Nici un X nu este Y)

E': $x)Y$ sau $x.y$, $x))Y$ sau $x(\cdot)Y$ (Toate sînt X sau Y sau amîndouă)

I_1: XY, $X()Y$ (Unii X sînt Y)

I': xy, $x()y$ sau $X)$ $(Y$ (Unii nu sînt nici X, nici Y)

O_1: Xy sau $X.Y$, $X(y)$ sau $X(.(Y$ (Unii X nu sînt Y)

O': xY sau $Y:X$, $x()Y$ sau $x).)Y$ (Unii Y nu sînt X)

Pe baza acestor expresii se formează modurile silogismului.

Ex. de moduri ale fig. I.

$$\frac{\begin{array}{c} X))Y \\ Y)\cdot(Z \end{array}}{X)\cdot(Z} \qquad \frac{\begin{array}{c} X)\ \ (Y \\ Y(\ \ (Z \end{array}}{X)\cdot\cdot(Z}$$

Simbolica lui de Morgan pune o mulțime de dificultăți, fapt pentru care ea n-a reușit să se impună.

Un merit în dezvoltarea logicii de către A. de Morgan constă în faptul că a pus începutul *teoriei relațiilor.*

Dăm, după T. Kotarbinski, unele propoziții fundamentale pentru teoria relațiilor, propoziții care aparțin lui A. de Morgan.

1) Negațiile relațiilor converse sînt reciproc converse.

Ex. $a>b$ și $b<a$ sînt relații converse. Negația lui $\overline{a>b}$ este reciproc conversă cu relația lui $\overline{b<a}$.

Într-adevăr, $\overline{a>b} = a\leqslant b$ și $\overline{b<a} = b\geqslant a$. Or $a\leqslant b$ este conversă cu $b\geqslant a$.

2) Conversele negațiilor sînt negații între ele.

Ex. Relația $a>b$ este negația lui $a\leqslant b$, iar relația $b<a$ este negația lui $b\geqslant a$.

3) Negarea conversei este conversa negației. Fie relația „*a* e mai sus ca *b*" Conversa ei va fi „*b* e mai jos ca *a*" Negarea conversei este „*b* nu e mai jos ca *a*", iar negarea acesteia „*b* nu e mai sus ca *a*", iar conversa acesteia este „*a* nu e mai jos ca *b*"

4) Dacă o relație oarecare atrage după sine o alta, atunci conversa primei atrage după sine conversa celei de-a doua relații.

Fie relațiile $a\ T\ b$ (a este tatăl lui b), $a\ B\ c$ (a este bunicul lui c) și conversele lor: $b\ F\ a$ (b este fiul lui a) și $c\ N\ a$ (c este nepotul lui a).

Vom avea: $\dfrac{a\ T\ b \rightarrow a\ B\ c}{b\ F\ a \rightarrow c\ N\ a}$ (se deduce că)

5) Dacă o relație oarecare atrage după sine pe o alta, atunci negarea celei de-a doua atrage după sine negarea primei.

Exemplu:

$$\frac{a\ T\ b \rightarrow a\ B\ c}{a\ \bar{B}\ c \rightarrow a\ \bar{T}\ b}$$

Există și alte propoziții importante ale teoriei relațiilor în logica lui de Morgan, dar ne oprim aici.

Un alt fapt important este acela că pe baza teoriei relațiilor, de Morgan a formulat schemele silogisticii generalizate.

A. de Morgan a dat și forma generală pentru *silogismus obliquus* („antisilogismul" — Leibniz).

În ce privește logica propozițiilor, de numele lui A. de Morgan ne reamintesc cele două legi

$$\overline{p \cdot q} = \bar{p} \vee \bar{q}$$

$$\overline{p \vee q} = \bar{p} \cdot \bar{q}$$

pe care el ce-i drept nu le-a simbolizat, ci le-a exprimat în cuvinte.

Ideile lui Boole au fost dezvoltate pe diferite linii de către R. L. Ellis, W S. Jevons, R. Grossmann, J. Venn, Hugh Mc Coll, E. Schröder și P. S. Porețki. Jevons introduce disjuncția neexclusivă: $A + B + C = A + D + E$, iar J. D. Gergonne relația de incluziune pe care o notează cu $\subset$ („conține") și $\supset$ („e conținut") (în *Essai de la dialectique rationnelle)*. Aceeași relație este introdusă de către Schröder sub numele de „subordonare"pentru „$\subset$" și „supraordonare" pentru „$\supset$" (ceea ce reamintește de logica tradițională).

Hugh Mc Coll (1837—1909)

Un moment important în dezvoltarea logicii îl constituie lucrările lui **Hugh** Mc Coll. Dăm, după cartea lui Bochenski, *Formale Logik*, cel mai important fragment (în rezumat) din opera lui Hugh Mc Coll.

1) Se stabilesc enunțurile A, B, C, apoi expresiile:

$A = 1$ (enunțul A este adevărat),

$A = 0$ (enunțul A este fals),

$A = B$ (enunțul A este echivalent cu B).

2) $A \times B \times C$ sau $A\ B\ C$ desemnează un enunț compus față de care A, B, C sînt factori. $ABC = 1$ spune că toate cele trei enunțuri sînt adevărate.

$ABC = 0$ spune că nu toate cele trei enunțuri sînt adevărate, deci că cel puțin unul este fals.

3) $A + B + C$ desemnează un enunț nedeterminat care are ca termeni pe A, B, C. $A + B + C = 0$ spune că toate cele trei enunțuri sînt false.

$A + B + C = 1$ spune că nu toate enunțurile sînt false sau că cel puțin unul este adevărat,

4) Simbolul A' este negația lui A. Raportul dintre A' și A este dat de următoarele egalități:

$$A + A' = 1$$

$$A\ A' = 0$$

Negația se aplică și la enunțuri compuse: $(AB)'$ este negația lui AB

5) Dacă numai un termen al enunțului nedeterminat $A + B + C + \ldots$ poate fi adevărat sau dacă nu pot fi doi termeni adevărați, vom spune că ei sînt reciproc opuși sau exclusivi.

6) A B spune că A implică pe B sau că dacă A este adevărat totdeauna, B este totdeauna adevărat.

$A = B$ și $A = AB$ sînt enunțuri echivalente.

Pe baza simbolurilor introduse mai sus, Mc Coll construiește un sistem „algebric" în spiritul lui G. Boole.

*Reguli**

R_1. Regulile înmulţirii algebrice obişnuite sînt aplicabile şi la înmulţirea enunţurilor nedeterminate, deci:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD \text{ ş.a.m.d.}$$

pentru orice număr de factori.

R_2. Fie A, B (astfel că A implică pe B sau B este adevărat independent de A). Vom avea:

(a) $A = AB$

(b) $A = AA = AAA\ldots$ (caz special al lui (a))

(c) $A = A(B + B') = A(B + B')(C + C')$ ş.a.m.d.,

pentru $B + B' = 1 = C + C'$ ş.a.m.d.

R_3. $(AB)' = AB' + A'B + A'B' = AB' + A'(B + B') = AB' + A' = A'B + B'(A + A') = A'B + B'$, deoarece $A + A' = 1$ şi $B + B' = 1$

La fel pentru orice număr de termeni:

$$(ABC)', \ (ABCD)' \text{ etc.}$$

R_4. $(A + B)' = A'B'$

$$(A + B + C)' = A'B'C' \text{ ş.a.m.d.}$$

R_5. $A + B = \{(A + B)'\}' = (A'B')' = AB' = A'B + AB = AB' + (A' + A)B = AB' + B = A'B + A(B' + B) = A'B + A$

La fel pentru $A + B + C$, $A + B + C + D$ ş.a.m.d.

R_{11}. Dacă $A \quad B$, atunci $B' : A'$

R_{12}. Dacă $A \quad B$, atunci $AC \quad BC$

R_{13}. Dacă $A : \alpha$, $B \quad \beta$, $C : \gamma$, atunci $ABC : \alpha\beta\gamma$ (la fel pentru orice număr de termeni).

R_{14}. Dacă $AB = 0$, atunci $A \quad B'$ şi $B \quad A'$

Df. $_{13}$. Expresia $A \div B$ spune că A nu implică pe B. $A \div B$ este echivalent deci cu $(A : B)'$

R_{15}. Dacă A implică pe B şi B implică pe C, atunci A implică pe C

R_{16}. Dacă A nu implică pe B, atunci B' nu implică pe A', cu alte cuvinte:

$A \div B$ şi $A' \div B'$ sînt echivalente.

---

* Numerotarea regulilor şi definiţiilor date aci aparţine lui Hugh Mc Coll.

R_{17}. Dacă A implică pe B și nu pe C, atunci B nu implică pe C, altfel spus din $A : B$ și $A \div C$ rezultă $B \div C$.

Iată și o serie de formule importante:

(1) $1' = 0, 0' = 1$

(2) $1 = 1 + a = 1 + a + b = 1 + a + b + c, =$

(3) $(ab + a'b')' = a'b + ab'$

$(a'b + ab')' = ab + a'b'$

(4) $a \quad a + b : a + b + c \ldots$

(5) $(\alpha + A)(\alpha + B)(\alpha + C) \quad = \alpha + ABC$

(6) $(a \quad b) \quad a' + b$

(7) $(a = b) = (a \quad b)(b : a)$

(8) $(a = b) \quad ab + a'b'$

(9) $(A \quad a)(B \quad b)(C : c) \quad (ABC \ldots : abc \ldots)$

(10) $(A : a)(B \quad b) \quad (C : c) \quad (A + B + C + a + b + c + \ldots)$

(11) $(A \quad x)(B \quad x) \ldots = (A + B + \quad x)$

(12) $(x \quad A)(x \quad B)(x \quad C) \ldots = (x : ABC \ldots)$

(13) $(A \quad x) + (B \quad x) + (C \quad x) + \quad (ABC \quad x)$

(14) $(x \quad A) + (x \quad B) + (x : C) \ldots : (x \quad A + B + C + \ldots)$

Trebuie să recunoaștem că Mc Coll ne pune în fața logicii propozițiilor așa cum o cunoaștem noi azi, căci de aci pînă la calculul actual al propozițiilor nu mai trebuie decît oarecare schimbări de formă.

P. S. Porețki (1846—1907)

Astronomul rus P. S. Porețki dă o formă interesantă logicii lui Boole construind un procedeu original de rezolvare a ecuațiilor logice[1].

Simbolica lui Porețki:

1. a, b, c, variabile.

2. 1, 0 constante. 1 desemnează „universul discursului" și 0 mulțimea vidă.

3. înmulțirea logică,

$+$ suma logică,

$'$ complementaritatea,

$=$ egalitatea (nu e definită),

$\leqslant$ incluziunea (se definește prin egalitate).

[1] Pentru referiri la Porețki am folosit articolul lui N. I. Steajkin, *Simplificarea de către Porețki a unor algoritmi ai calculului clasic al propozițiilor.*

Problema pe care o pune Porețki este rezolvarea unei ecuații (egalități) logice date. A rezolva o egalitate logică înseamnă „a deduce din ea toate sau cîteva din concluziile ei logice" Rezolvarea egalității este totală sau parțială în funcție de faptul dacă toate sau numai unele concluzii au fost găsite.

Rezolvarea deplină a unei egalități logice este dată atunci cînd am găsit sistemul concluziilor echivalent cu egalitatea.

Ex. Fie egalitatea

(1) $1 = a\,b + a'c$ (unde a' este negația lui a)

O rezolvare parțială a acestei egalități este:

(2) $a = a\,b,$

iar rezolvarea completă constă din:

(3) $a = a\,b$ și $a' = a'c$

Aceasta se obține astfel:
înmulțim ambele părți ale egalității (1) cu a și obținem:

$$a \cdot 1 = a \cdot a\,b + a \cdot a' \cdot c$$

De unde prin

$$a \quad 1 = a,$$
$$a \cdot a' = 0$$
$$0 \cdot c = 0$$

obținem:

$$a = a \cdot a \quad b$$

or $a \cdot a = a$, deci
$a = a\,b$, ceea ce nu este altceva decît egalitatea (2).
Egalitatea $a' = a'c$ se obține astfel:
înmulțim membrii egalității (1) cu a' și obținem:

$$a' \quad 1 = a' \cdot a \cdot b + a' \quad a' \cdot c$$

Deoarece:

$$a' \quad a = a',$$

$$a' \cdot a = 0$$

$$a' \cdot a' = a'$$

(4) $a' = o + a'c.$

deci:

[redacted] Q.e.d.

Se poate dovedi apoi că (1) este concluzie a lui (3).

Procedăm astfel:

adunăm egalitățile (2) și (4) și obținem:

$$a + a' = a\,b + a'c$$

De aci prin $a + a' = 1$ obținem:

$1 = a\,b + a'c$, adică egalitatea (1).

Se demonstrează apoi că nici una din egalitățile (2), (4) nu este luată separat echivalentă cu (1).

Presupunem că $b = 1$, a e diferit de 1 și $c = 0$

Pentru (2) obținem:

$a = a\,1 = a$, deci:

$$a = a,$$

iar pentru (1) obținem:

$1 = a\,1 + a'\,0 = a\,1 + 0 = a\,1 = a$, deci:

$$1 = a,$$

or noi am presupus că a este diferit de 1 și deci 1 = a contrazice această presupunere.

Egalitățile (1) și (2) nu au deci o soluție comună și deci nu sînt echivalente. Logicianul american A. Blake a folosit cercetările lui Porețki pentru dezvoltarea teoriei formelor canonice ale expresiilor logice.

O dată cu P. S. Porețki se încheie o primă etapă în dezvoltarea logicii simbolice, așa-numita etapă a „algebrei logice" sau a „algebrei booleene"

O nouă etapă spre care face trecere opera lui Hugh Mc Coll este etapa dezvoltării logicii ca instrument de fundamentare a matematicii. Vom numi această etapă pur și simplu „etapa fundamentării matematicii"

§ 3. ETAPA FUNDAMENTĂRII MATEMATICII

Gînditorii cei mai de seamă ai acestei etape sînt Ch. S. Peirce, Gottlob Frege, G. Peano și B. Russell.

După afirmația lui Bochenski, Peirce și Frege „rămîn practic neobservați" (ei vor fi descoperiți mai tîrziu), singur Peano întemeind o școală.

Ch. Peirce (1835—1882)

Ch. Peirce este unul dintre cei mai mari logicieni ai veacului al XIX-lea. Contribuția sa la dezvoltarea logicii s-a făcut simțită pe multe planuri (logica propozițiilor, logica claselor, logica predicatelor și logica relațiilor).

Simbolica lui Peirce

1) $a, b, c,$ clase de indivizi,

2) $+,$ (semnul adunării cu virgulă) suma logică, apoi „$+$",

3) $a\ b$ produs a două clase

4) $-\!\!<$ incluziunea,

5) $\underset{,}{=}$ egalitatea (mai tîrziu „$=$" sau „$\equiv$")

6) — negația

7) 1, 0 două constante (booleene)

8) Peirce introduce apoi un functor nou pe care-l notează cu „λ" și care este antidisjuncția.

9) $x, y, z,$ enunțuri (uneori clase, proprietăți, relații),

10) v (adevăr), f (fals),

11) i (individ)

12) Π cuantorul universalității și Σ cuantorul existențial.

Pe parcurs Peirce adoptă și alte semne.

Peirce observă (1867) că suma logică $a +, b$ se deosebește de cea aritmetică, deoarece aceasta se referă la identitate și nu la egalitate.

Printre proprietățile sumei el remarcă:

(1) $a +, a \underset{,}{=} a$

(2) $a +, b \underset{,}{=} b +, a$

(3) $(a +, b) +, c \underset{,}{=} a +, (b + \quad c)$

În 1870 Peirce introduce pentru prima dată în mod sistematic conceptul de incluziune.

Incluziunea se bucură, după cum arată el, de proprietatea tranzitivității.

Dacă $x -\!\!< y$ şi $y -\!\!< z$ atunci $x -\!\!< z$
Egalitatea se defineşte prin incluziune. A spune că $x = y$ înseamnă că $x -\!\!< y$ şi $y -\!\!< x$

În 1880 Peirce introduce functorul „λ"

„De exemplu, $x\lambda y$ înseamnă că x este f şi y este f. Atunci $(x\lambda y)\ \lambda z$ sau $x\lambda y\lambda z$ înseamnă că z este f, dar (*de asemenea*) şi faptul că enunţul că„ x şi y sînt amîndouă f„ este el însuşi f, adică *fals*. Deci valoarea lui $x\lambda x$ este aceeaşi cu a lui $\bar{x}$; şi valoarea lui $\underline{x\lambda x}\,\lambda x$ este f, deoarece acest enunţ este necesar fals; în timp ce valoarea lui $\underline{x\lambda y}\ \lambda\ \underline{x\lambda y}$ numai atunci este f cînd $x\lambda y$ este v; şi $(\underline{x\lambda}x\lambda x)\ \lambda(x\lambda\underline{x\lambda x})$ este necesar adevărat, astfel că el are valoarea v"[1].

Cu ajutorul lui λ şi al parantezelor putem exprima orice afirmaţie asupra valorii expresiilor.

x este $\underline{x\lambda x}\ \lambda\ \underline{x\lambda x}$

$\bar{x}$ este $x\lambda x$

$x\colon \vee \colon \bar{x}$ este $(\underline{x\lambda x}\ \lambda\ x)\ \lambda\ (x\lambda\ \underline{x\lambda x})$

$x \cdot \bar{x}$ este $\underline{x\lambda x}\ \lambda x$

$-\ (x\ \bar{x}\ y\ \bar{y})$ este $\{\underline{x\lambda y}\ \ (\underline{x\lambda y}\ \lambda\ \underline{x\lambda y})\}\ \lambda\ \{(\underline{x\lambda y}\ \lambda\ \underline{x\lambda y})\ \lambda\ \underline{x\lambda y}\}$

$x \vee y$ este $\underline{x\lambda y}\ \ \underline{x\lambda y}$

$x \cdot y$ este $\underline{x\lambda x}\ \ \underline{y\lambda y}$

$x \equiv y$ este $(x\ \lambda\ \underline{y\lambda y})\ \lambda\ (\underline{x\lambda x}\ \lambda\ y)$

Să verificăm cu ajutorul procedeului matriceal una din echipolenţele de mai sus.

$x\ y$	$x \vee y$	$x\lambda y$	$\underline{x\lambda y}\ \lambda\ \underline{x\lambda y}$
1 1	1	0	0 1 0
1 0	1	0	0 1 0
0 1	1	0	0 1 0
0 0	0	1	1 0 1

[1] Citâm după I. M. Bochenski, *Formale Logik*.

Peirce introduce pentru prima dată reprezentarea sub formă de tabel a alegerilor de adevăr ale unei expresii.

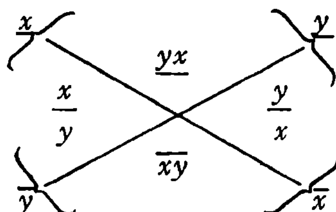
El notează enunţul fals cu $\bar{x}$,

$$\text{adică } \bar{x} = \text{f}$$

şi enunţul adevărat cu $\underline{x}$, adică

$$\underline{x} = v$$

Pentru cazul în care avem două argumente x şi y, Peirce dă următorul tabel („diagramă"):



Tot Peirce construieşte un (fragment) din tabel cu 3 argumente:

x	y	z
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

Deosebit de important este faptul că Peirce dă şi formula numărului de alegeri („situaţii") şi a numărului de „forme de enunţuri". Pentru cazul în care avem două argumente, numărul de situaţii este 2^2, adică 4.

Pentru a afla numărul de „forme de enunţuri" (Peirce), el dă formula:

$$n^m$$

unde m este numărul enunţurilor, iar n—numărul de valori.

Introducînd numărul de valori în general n, Peirce deschide posibilitatea pentru ca mai tîrziu să se construiască logici polivalente cu un număr oarecare de valori (vezi Post). Mai mult, ideea logicii polivalente se găseşte expres la Peirce: Astfel, el scrie: „Conform cu logica obişnuită

orice enunţ este sau adevărat sau fals şi nici o altă distincţie nu se mai poate face. Aceasta este, cum ar spune geometrul, concepţia descriptivă; concepţia metrică ar spune că orice enunţ este mai mult sau mai puţin fals şi că aceasta este o chestiune de grad" (citat de Bochenski, în *Formale Logik*, p. 383). G. Boole însuşi socotise logica cu două valori (1, 0) ca un caz-limită al raportului de probabilitate $\frac{K}{l}$, unde dacă $K = l$, $\frac{K}{l} = 1$, iar dacă $K = 0$, $\frac{K}{l} = 0$

O ultimă realizare a lui Peirce asupra căreia vrem să ne oprim este introducerea cuantorilor.

Pentru „unii" el introduce semnul „Σ", iar pentru „toţi" semnul „Π"

Semnul „Σ" (de la „sumă") şi semnul „Π" (de la „produs") sînt puse în legătură cu suma şi produsul din calculul propoziţiilor.

Ex. $\Sigma_i \, x_i = x_i + x_j + x_k +$

$\Pi_i \, x_i = x_i \, x_j \, x_k$

Ce-i drept, el afirmă că „$\Sigma_i \, x_i$ şi $\Pi \, x_i$ seamănă doar cu *suma* şi *produsul*, ele nu sînt de aceeaşi natură, deoarece indivizii universului pot să nu fie enumerabili" (citat după Bochenski, *op. cit.*, p. 405).

Gottlob Frege (1848—1925) a fost profesor de matematică la Universitatea din Jena.

Dintre operele sale renumite amintim:

1) *Begriffschrift eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*,
2) *Die Grundlagen der Arithmetik*,
3) *Function und Begriff*,
4) *Ueber Sinn und Bedeutung*,
5 *Ueber Begriff und Gegenstand*,
6) *Grundgesetze der Arithmetik*.

Frege a avut ca scop principal fundamentarea matematicii. Din acest punct de vedere studiază el instrumentul logic.

Frege încearcă fundamentarea matematicii nemijlocit cu ajutorul logicii. Mai mult, în concepţia sa, matematica trebuie să se reducă la logică.

Reducerea matematicii la logică depindea de un singur lucru, de posibilitatea de a reduce conceptul de „număr" (conceptul pe care se sprijină întreaga matematică) la concepte logice, altfel spus de posibilitatea de a defini conceptul de număr în termeni pur logici.

Deşi Frege a izbutit să dea o definiţie riguroasă conceptului de număr, această definiţie nu justifică logicismul.

Frege construieşte pentru prima dată logica în mod axiomatic şi în acelaşi timp pur formal (abstracţie făcînd de orice sens şi semnificaţie).

Frege introduce o simbolică bidimensională, foarte greoaie, dacă ţinem seama de faptul că noi lucrăm, în mod obişnuit, cu simbolisme unidimensionale.

El face distincţie între „propoziţie" şi „judecată" Propoziţia este enunţarea unei idei fără referire la valoarea ei logică, iar judecata este o propoziţie care cuprinde referirea la valoarea logică (ceea ce noi am numi „aserţiune").

---

* Ce este numărul? În mod intuitiv vom spune că numărul este o însuşire a mulţimii. Frege, apoi Russell au arătat că conceptul de număr poate fi construit din concepte logice. Prezentăm cititorului mersul definiţiei dată de Frege şi Russell noţiunii de *număr cardinal*.

1. Se defineşte mai întîi noţiunea de *echipolenţă a claselor*.

Două clase sînt echipolente dacă şi numai dacă ele îşi corespund biunivoc.

Această definiţie cuprinde numai termeni logici, ceea ce poate fi urmărit mai bine dacă o exprimăm în mod simbolic.

$$A \sim B = \exists R \Big\{ \forall x \big[(x \in A) \to \exists y (xRy \,\&\, y \in B) \big] \,\&\, \forall y \big[(y \in B) \to \exists x (xRy \,\&\, x \in A) \big] \,\&\, \forall x \forall y \forall z \big[(xRy \,\&\, xRz) \to (y \equiv z)) \,\&\, (xRz \,\&\, yRz) \to (x \equiv y)) \big] \Big\}$$

Literele A, B desemnează clase; semnul „$\sim$" reprezintă relaţia *echipolenţei*; x, y, z, sînt elemente, iar R este o relaţie. Restul semnelor sînt cunoscute.

2. Numim *număr cardinal* al unei clase α clasa tuturor claselor echipolente cu α

Două clase echipolente au acelaşi număr cardinal.

Pe baza noţiunii de *clasă vidă* ($\wedge$) noi definim apoi numărul **0** (zero).

3. Numim *zero* numărul cardinal al clasei $\wedge$
4. Numim *unu* numărul cardinal al clasei 0 (zero).
5 Numim *doi* numărul cardinal al clasei (0, 1), ş.a.m.d.

De aci termenii „a afirma“ şi „a nega“, prin raport cu judecata, au un înţeles special. Faptul că afirm pe *A* se scrie astfel:

$$\vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; A;$$

faptul că neg pe *A* (deci că neg caracterul judecativ al lui *A*) se scrie astfel:

$$—\!\!\!-\!\!\!-\; A$$

Pentru cazul în care *A* şi *B* sînt două judecăţi *(beurteilbare Inhalte bedeuten)* avem 4 posibilităţi:

1) *A* este afirmat şi *B* este afirmat

2) *A* este afirmat şi *B* este negat

3) *A* este negat şi *B* este afirmat

4) *A* este negat şi *B* este negat.

Din cele patru cazuri al treilea este exclus prin:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!-\!\!\!-\!\!\!-\; A \\ \quad \lfloor\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; B \end{array}$$

iar al doilea şi al patrulea prin:

$$\vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; B$$

(Bara verticală arată legătura celor două propoziţii):

$\vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; A$ (*A* este judecată)

$—\!\!\!-\!\!\!-\; B$ (*B* nu este judecată).

Faptul că „*A* nu are loc“ se scrie:

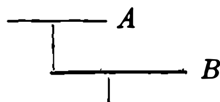
$$\vdash\!\!\!\!-\!\!\!\!\!\!\!\!\top\!\!\!\!-\!\!\!-\; A$$

Faptul că „*A* şi *B* se exclud reciproc“ se scrie:

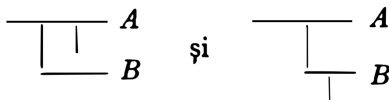
$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\!\!\!\!\top\!\!\!\!-\!\!\!-\; A \\ \quad \lfloor\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; B \end{array}$$

(citeşte: „*B* este afirmat şi nu are loc negarea lui *A* este negată“).

Disjuncția neexclusivă „*A* sau *B*" se scrie:



Disjuncția exclusivă se scrie astfel:



Exemplele de mai sus sînt suficiente pentru a sesiza dificultatea operării cu o asemenea simbolică.

Fără a intra în detalii mai enumerăm unele realizări importante ale lui Frege:

a) introducerea *conceptelor* de variabilă și funcție în logică,

b) introducerea sistematică a cuantorilor,

c) introducerea operatorului descripției („acel care"),

d) distincția între conceptul de „propoziție a calculului" și „regulă de calcul",

e) a pus bazele semanticii logice.

Frege este în același timp întemeietorul „logicismului", curent a cărui idee principală constă în aceea că matematica este o ramură a logicii.

G. Peano (1858—1932). Întemeietorul aritmeticii axiomatice, matematicianul italian G. Peano, a fost în același timp un strălucit logician. Dintre operele sale principale amintim: *Arithmetices principia, novo methodo exposita* (1889) și celebra *Formulaire de mathèmatiques* (1897, primul volum).

Peano găsește o scriere mult mai comodă decît a altor logicieni.

1) *a*, *b*, ...*x*, *y*, ...*x'*, *y'*, „ceva nedeterminat",

2) *P*, *K*, *N*, „ceva determinat",

3) Pentru stabilirea ordinii folosește parantezele ( ) sau punctele ș.a.m.d.

Ex. formula *a b* · *c d* : *e f* · *g h* . . *k*, poate fi scrisă și astfel: (((*a b*) (*c d*)) ((*e f*) (*g h*))) *k*

4) *P*, enunț,

5) *a* ∩ *b* înseamnă „*a* și *b*",

6) $-a$ înseamnă „non $- a$“,

7) $a \cup b$ înseamnă „a sau b“,

8) V — înseamnă „adevărat“,

9) Λ — înseamnă „fals“ („absurd“).,

10) $b\ C\ a$ înseamnă „b este consecința din a“,

11) $a \supset b$ înseamnă același lucru ca și $b\ C\ a$,

12) $=$ este echivalența.

Pentru a exprima generalitatea (deci cuantificarea), Peano introduce pentru relația de condiționare (deducție) următoarea notație: $a \supset_{x,y \ldots} b$, ceea ce înseamnă „pentru orice $x, y, \ldots$. b se deduce din a“

Cu scopul de a elimina echivocul simplifică notația scriind în loc de $\supset_{x,y}$, numai $\supset$

Semnul identității $=$ îl definește prin $\supset$ astfel

$$a = b \text{ înseamnă } a \supset b \quad b \supset a$$

Enunțul $a =_{x, y \ldots} b$ înseamnă același lucru ca și $a \supset_{x,y, \ldots} b \quad b \supset_{x,y} \quad a$

Peano introduce apoi noțiunile de „variabilă reală“ (liberă) și „aparentă“ (legată).

Pentru calculul claselor el introduce următoarele simboluri:

1) K — desemnează o clasă oarecare,

2) ε însemnează „este“, astfel

$a \ \varepsilon \ b \quad a$ este un b,

$a \ \varepsilon \ K : a$ este o clasă,

$a \ \varepsilon \ P : a$ este un enunț,

3) $- \varepsilon$ însemnează „nu este“, astfel:

$a - \varepsilon\ b$: a nu este b

Se poate scrie și astfel $-(a \ \varepsilon \ b)$

4) $a, b, c \ \varepsilon . m. = \quad a \ \varepsilon \ m. \ b \ \varepsilon \ m. \ c \ \varepsilon \ m$

5) Dacă a este o clasă atunci $-a$ înseamnă clasa care constă din indivizii care nu sînt a

6) $a \ \varepsilon \ K \quad \supset : x \ \varepsilon - a . = \quad x - \varepsilon \ a$

7) Semnul „ε" trebuie deosebit de semnul „⊃" (incluziunea):

$a \varepsilon b$ a este un b,

$a \supset b$ orice a este b

8) ιa înseamnă „a-ul" (individul x care formează clasa a),

9) $\exists a$ înseamnă „există a"

Această simbolică a fost preluată, cu unele modificări, de către Russell şi ea s-a impus logicienilor devenind o scriere universală.

Peano a creat şi un sistem axiomatic al aritmeticii care este acceptat şi în ziua de azi.

B. Russell (n. 1872) şi *A. N. Whitehead* (1861—1947). Eforturile perioadei „algebrei logice" şi în special ale perioadei „fundamentării matematicii" îşi găsesc încununarea în sinteza capitală din opera *Principia Mathematica* scrisă de către logicienii englezi Whitehead şi Russell şi publicată în 1910 (vol. I), 1912 (vol. II), 1913 (vol. III). Această operă cuprinde: 1. Calculul clasic al propoziţiilor; 2. Calculul predicatelor; 3. Calculul claselor, 4. Calculul relaţiilor; 5. Aritmetica.

Din punct de vedere filozofic, la baza operei stă concepţia „logicistă"

Sub raport arhitectonic, la baza *Principiei Mathematica* stau principiile metateoretice ale teoriei tipurilor.

Whitehead şi Russell preced calculul cu ample explicaţii metateoretice a termenilor (variabilă, funcţie, propoziţie, clasă ş.a.).

Simbolica lui Russell

1) p, q, r, variabile propoziţionale,

2) ca semne de punctuaţie sînt folosite punctele (sau parantezele),

3) $\sim$ înseamnă negaţia (ex. $\sim p$),

4) $\vee$ înseamnă „sau" (ex. $p \vee q$),

5) înseamnă „şi" (ex. $p \quad q$),

6) $\supset$ înseamnă „implică" (ex. $p \supset q$),

7) $\equiv$ înseamnă „exact atunci cînd" sau „atunci şi numai atunci cînd" (ex. $p \equiv q$),

8) $\vdash$ este semnul tautologiei (ex. $\vdash p \supset p$),

9) x, y, z, variabile individuale,

10) $(x) \cdot \varphi x$ înseamnă „pentru orice x are loc φx"

11) $(\exists x) \cdot \varphi x$ înseamnă „există un x pentru care are loc φx"

12) $\varphi \hat{x}$ este funcție propozițională, unde $\hat{x}$ înseamnă „x care ...",

13) $\varphi (x, y, \ldots)$ predicat poliadic,

14) $\imath x$ înseamnă „acel x care",

15) $E!$ înseamnă „există acesta",

16) $=$ semnul definiției.

17) ε semnul apartenenței.

Dăm unele formule russelliene (după Bochenski) care prezintă unele dificultăți pentru cititor.

1. $\exists ! \alpha \cdot = (\exists x) \quad x \varepsilon \alpha$ Df.

Se citește: „α există, înseamnă că există un astfel de x și x este α".

2. $[(\imath x) \quad (\varphi x) \cdot \psi (\imath x) \quad (\varphi x) \cdot = (\exists b) : \varphi x \cdot \equiv_x \cdot$
$\cdot x = b \quad \psi b$ Df.

Expresia „$(\imath x) (\varphi x)$" se citește „acel x astfel că φx" expresia „$\psi (\imath x) \varphi (x)$" : „proprietatea ψ de acel x pentru care $\varphi (x)$.

Partea a doua: „$(\exists b): \varphi x \cdot \equiv_x x = b : \psi b$"
se citește: „există cel puțin un astfel de b că ψb (ultima parte) și pentru orice x : φx are loc exact atunci cînd $x = b$.

3. $E ! (\imath x) \quad (\varphi x) \cdot = \quad (\exists b) : \varphi x \cdot \equiv_x \cdot x = b$ Df.

A spune că există acest x astfel că φx, înseamnă a spune că există exact un astfel de b astfel că φx și pentru orice x este tocmai b.

În ce privește funcțiile propoziționale, Russell introduce distincția între *funcții intensionale* și *funcții extensionale*.

Ex. funcțiile $(x) \cdot \varphi x$ și $(\exists x) \cdot \varphi x$ sînt extensionale, iar funcția „Eu cred că $(x) \varphi x$" este o funcție intensională.

Un loc important ocupă în *Principia Mathematica* analiza paradoxelor logice și procedeul de rezolvare a acestor paradoxe — teoria tipurilor. Natura lucrării de față nu ne permite însă să expunem acest capitol interesant. În ce privește calculul, el nu diferă prin conținut (tezele admise) de cel expus în această carte, *Principia Mathematica* putînd

fi socotit primul manual de logică matematică. Opera lui Whitehead și Russell încheie o perioadă în istoria logicii matematice, constituind treapta indispensabilă pentru evoluțiile viitoare.

§ 4. PERIOADA RAMIFICĂRII LOGICII

Rezultatele secolului al XIX-lea în domeniul dezvoltării logicii simbolice au fost impresionante. Ele se găsesc sintetizate pentru prima oară în *Principia Mathematica*. Dar construirea logicii matematice a ridicat noi probleme și noi dificultăți.

Sistemul logico-aritmetic al lui Frege și teoria mulțimilor abstracte a lui Cantor au adus cu sine în prim plan *problema paradoxelor*. Paradoxele amenințau de pretutindeni, din interiorul sistemelor ca și din încercarea de a aplica sistemele.

Ele au arătat că se impune o analiză temeinică a conceptelor logice și o extindere a sistemelor pentru a putea cuprinde întreaga bogăție a gîndirii și realității sub aspect logic.

Logica secolului al XX-lea se dezvoltă sub semnul străduințelor de a birui aceste dificultăți, de a rezolva problemele noi.

Logica se ramifică nebănuit de mult, apar noi sisteme, noi domenii de cercetare.

Printre ele amintim:

1) logicile polivalente,
2) logicile modale,
3) teoria sistemelor logice (metalogica),
4) logica „tehnică",
5) filozofia logicii (metalogica filozofică).

1. *Logicile polivalente*

Ideea polivalenței apare clar încă la G. Boole, iar Ch. S. Peirce o exprimă direct.

La drept vorbind, originea acestei idei se află în *Organonul* lui Aristotel. Încă Aristotel observă în cartea sa *Despre interpretare* că nu toate judecățile se supun dihotomiei adevăr-fals. Printre cele ce fac excepție sînt judecățile asupra viitorului contingent. Despre judecata „mîine va

fi o bătălie navală" noi nu putem spune nimic precis, scrie Aristotel, nici că e adevărată, nici că e falsă.

În anul 1920, Lukasiewicz, pornind de la judecățile modale de posibilitate, construiește un prim sistem de logică polivalentă (acest sistem a fost expus de noi în capitolul I). În același an, independent de Lukasiewicz, E. L. Post pornind de la ideile lui Ch. S. Peirce construiește un alt sistem de logică polivalentă (cu un număr infinit de valori). Alte sisteme au fost construite de Bocivar (trivalent), Reichenbach, Kleene, Lukasiewicz ș.a.

Pornind de la problema rezolvării paradoxelor teoriei mulțimilor, Brouwer și Heyting construiesc de asemenea un sistem de logică polivalentă, așa-numita „logică intuiționistă"

2. *Logicile modale.*

Dacă pentru logicile polivalente se pune în primul rînd problema diversificării valorilor, pentru un alt șir de logici problema constă în primul rînd în introducerea a noi tipuri de enunțuri (corespunzător de functori). În 1913 logicianul englez Lewis construiește sistemul logic bazat pe „implicația strictă" La drept vorbind, nu numai implicația se dublează în implicație „materială" și „strictă", ci și ceilalți functori. Rolul implicației stricte este însă de primă importanță în construirea acestui sistem. Iată definiția unor functori în logica lui Lewis.

1. Implicația strictă $p \prec q = \sim (p - q)$ Def.
2. Implicația materială $p \subset q = - (p - q)$ Def.
3. Suma logică strictă $p \wedge q = \sim (- p - q)$ Def.
4. Suma logică materială $p + q = - (- p - q)$ Def.
5. Echivalența strictă $(p = q) = (p \prec q)\, q \prec p$ Def.
6. Echivalența materială $(p \equiv q) = (p \subset q)\, (q \subset p)$ Def.

Semnificația simbolurilor: $-$ (negația), $\sim$ (imposibilitatea), $\subset$ (implicația materială), $\prec$ (implicația strictă).

3. *Teoria sistemelor logice*

Teoria sistemelor logice, apărută la început sub numele de „metamatematică", este o disciplină întemeiată de D. Hilbert. Pentru Hilbert, „metamatematica" avea un înțeles restrîns: teoria care studiază procedeele de demonstrație a noncontradicției sistemelor matematice.

Ulterior, înțelesul s-a extins iar numele s-a schimbat. Destul de des se folosește termenul de „metalogică". Teoria sistemelor logice cuprinde:

1) studiul procedeelor de construcție a sistemelor,

2) studiul principalelor dificultăți ale sistemelor (paradoxele logice, teorema lui Gödel),

3) studiul raporturilor dintre expresia și obiectul pe care-l desemnează (semantica). — Printre cei care au contribuit la dezvoltarea acestei teorii sînt recunoscuți azi Frege (teoria conceptelor logice și teoria sensului), Russell (teoria tipurilor), Hilbert (teoria demonstrației), Gödel (teorema despre incompletitudinea principială a sistemelor de tipul *Principia Mathematica)*, A. Tarski (teoria adevărului în limbile formalizate), R. Carnap (teoria sensului) ș.a.

4. *Logica „tehnică"*

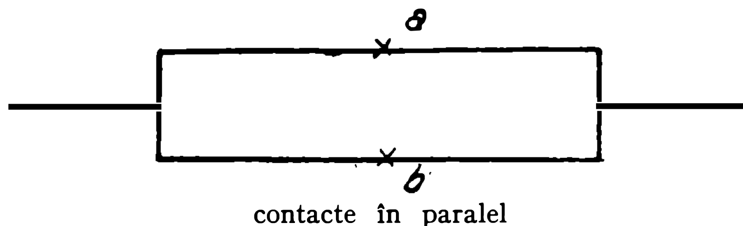
Încă din evul mediu au fost oameni care au visat la realizarea unor „mașini logice" Reamintim pe Raimundus Lullus. Pe atunci acest lucru părea o utopie. Veacul al XX-lea a reluat multe din visele fantastice ale medievalilor. A devenit reală problema transmutației elementelor în chimie. A devenit reală și problema mașinilor logice.

În anul 1938 inginerul american Claude Shannon publică lucrarea *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits* (Analiza simbolică a schemelor de relee și contacte), iar în anul 1941 matematicianul sovietic V I. Șestakov publică lucrarea *Algebra schemelor bipolare*. Începutul aplicării logicii în tehnică era făcut.

Nu intrăm în detalii, dăm doar cîteva idei elementare. Considerînd schemele electrice cu contacte, există două posibilități în ce privește dispunerea contactelor: dispunerea în serie și în paralel.



contacte în serie



contacte în paralel

Fiecare contact poate fi „închis" sau „deschis". Dacă contactul e închis, curentul circulă, iar dacă e deschis curentul nu circulă.

Să notăm cele două situații respectiv cu 1 (închis) și cu 0 (deschis); 1 și 0 vor însemna de asemenea: 1 — curentul circulă, 0 — curentul nu circulă.

Descriem acum cazurile în care curentul circulă sau nu circulă prin cele două tipuri de scheme. Notăm schema cu S și contactele cu a, b.

Pentru schema cu contactele în serie avem următoarele situații:

α) $a = 1$, $b = 1$ (deci a e închis și b e închis), $S = 1$ (curentul circulă prin S),

β) $a = 1$, $b = 0$, $S = 0$

γ) $a = 0$, $b = 1$, $S = 0$

δ) $a = 0$, $b = 0$, $S = 0$

Pentru schema cu contacte în paralel avem situațiile:

α) $a = 1$, $b = 1$, $S = 1$

β) $a = 1$, $b = 0$, $S = 1$

γ) $a = 0$, $b = 1$, $S = 1$

δ) $a = 0$, $b = 0$, $S = 0$

Izomorfismul dintre aceste situații și matricele conjuncției, respectiv disjuncției, nu stîrnește nici o îndoială. Schema cu contacte în serie poate fi reprezentată riguros prin conjuncția logică, iar schema cu contacte în paralel — prin disjuncția logică.

Această posibilitate de a reprezenta schemele electrice cu ajutorul operațiilor logice dă pe de o parte posibilitatea construirii unor mașini electrice cu program logic, iar pe de altă parte de a rezolva unele probleme de construcție a sistemelor electrice, de ex. aflarea celui mai economic sistem de contacte (minimizarea sistemelor electrice).

Posibilitatea aplicării logicii la rezolvarea problemelor tehnice se mărește mereu, existînd de pe acum multe rezul-

tate pozitive. Logica a intrat definitiv în circuitul aplicațiilor tehnice o dată cu întemeierea ciberneticii (N. Wiener).

Cercetările în legătură cu aplicarea logicii în tehnică au fost grupate sub numele de „logica tehnică" Prin logica tehnică știința logicii capătă o nouă confirmare.

5. *Filozofia logicii*

Cum e și firesc, orice salt mare în știință pune numeroase probleme filozofice.

Problemele filozofice ale logicii au fost dezvoltate îndeosebi în legătură cu problema conținutului matematicii în cadrul anumitor curente. Dintre ele menționăm: logicismul (reducerea matematicii la logică), formalismul (reducerea logicii la matematică, iar matematica la sistemul de semne), intuiționismul (opus formalismului, recunoaște un conținut matematicii, dar numai un conținut de gîndire), semantica filozofică (reducerea întregii științe la limbă și deci negarea conținutului obiectiv al științei). Cel mai adesea sub denumirile de „logicism", „formalism", „intuiționism", „semantică" sînt cuprinse și anumite teorii logice adevărate. Trebuie, evident, să distingem între partea logică și partea filozofică a acestor curente.

Întemeietorul logicismului este socotit Gottlob Frege, iar principalul reprezentant al acestui curent este B. Russell. Întemeietorul formalismului este D. Hilbert, iar al intuiționismului este Brouwer. În ce privește semantica filozofică, un rol de seamă l-a avut în constituirea ei R. Carnap.

Filozofii marxiști opun acestor denaturări filozofice ale logicii matematice interpretarea materialist-dialectică a logicii.

§ 5. LOGICA MATEMATICĂ ÎN ROMÎNIA

Deși cercetările de logică matematică au început mai tîrziu în țara noastră, ele au ajuns la unele rezultate importante.

Inițiatorul cercetărilor de logică matematică în Romînia este prof. Gr. C. Moisil.

În 1935, Gr. Moisil publică la Iași lucrarea *Recherches sur l'algèbre de la logique* în „Annales scientifiques de l'Université de Jassy" (pp. 1—113). În felul său această lucrare

dezvăluie un program. Gr. Moisil supune logica unui tratament algebric, dar de astă dată nu mai e vorba de algebra elementară a secolului al XIX-lea, ci de algebra abstractă a secolului al XX-lea. Dacă logica booleeană este „algebră elementară", logica în concepţia lui Gr. Moisil este o „algebră abstractă", o algebră în care îşi fac loc în primul rînd conceptele matematicii moderne (mulţime, ideal, grup, inel, structură ş.a.).

Concepţia care pare să stea la baza lucrărilor lui Gr. Moisil este opusă logicismului, fiind vorba de o anumită tendinţă de a vedea logica drept o ramură a matematicii. Din 1935 şi pînă astăzi numărul lucrărilor lui Gr. Moisil a crescut foarte mult şi a abordat domenii diverse ale logicii matematice. În toate autorul relevă caracterul „algebric" al sistemelor logice. El studiază îndeaproape logicile polivalente (în special cele lukasiewicziene), creează un sistem de logică modală, studiază anumite variante ale logicii pozitive (folosind între altele ideea de scheme de diferite ordine), demonstrează teoreme în logica intuiţionistă (vezi A. Heyting, *Fundamentele matematicii şi intuiţionismul)*, abordează logica statistică a conceptului şi cercetează cu foarte bune rezultate problema aplicării logicii în tehnică (în particular la schemele cu relee şi contacte). În acelaşi timp, mai ales în ultimii ani, el organizează activitatea de cercetare şi de creştere a noi cadre în domeniul cercetării logico-matematice.

Un alt logician romîn care s-a impus prin cercetările sale asupra logicii bazate pe echivalenţă şi negaţie este Eugen Mihăilescu. Cîteva aprecieri asupra sistemului de logică al lui E. Mihăilescu se găsesc în cartea lui A. Church, *Introducere în logica matematică* (cap. II, § 26). Unele cercetări de logică matematică aparţin lui Fl. Ţuţugan, cercetător de factură tradiţională. Fl. Ţuţugan abordează în acelaşi timp logica tradiţională prin prisma logicii matematice, deschizînd un orizont nou pentru dezvoltarea acestei ramuri a logicii.

După 1940 ca un popularizator al logicii matematice s-a impus Anton Dumitriu.

Un loc important îl ocupă problemele filozofice ale logicii matematice în lucrările acad. Ath. Joja şi îndeosebi în studiile *Elaborarea logicii dialectice de către V I. Lenin în ra-*

port cu evoluția generală a logicii, *Despre tertium non datur*, *Critica pozitivismului logic* și *Prezența lui Aristotel în logica modernă*. Critica oricărei încercări de a goli logica de conținut obiectiv este una din preocupările de frunte ale acad. Ath. Joja.

Logica matematică nu este un joc, „ca de pildă jocul de șah. Adevărul, *verificarea prin practică, străjuiește deci începutul și sfîrșitul mecanismului logic*. Logica matematică se eliberează de sens, de conținut, de adevăr, numai pe ceea ce aș numi traseul operațional"[1].

Apariția unei reviste de logică, „Acta logica", în 1958 și înființarea unui „Centru de cercetări logice" în 1964 deschid noi posibilități dezvoltării științei logicii în țara noastră. Toate acestea pun în același timp problema formării de cadre noi capabile și bine pregătite. De o stringentă actualitate este traducerea celor mai de seamă opere din domeniul logicii contemporane în limba romînă. Logica matematică este treapta superioară a dezvoltării unei științe unice — LOGICA. Dacă astăzi apare ca o necesitate pentru mulți oameni de știință din domeniul științelor speciale și tehnicii de a studia logica matematică, pentru cei ce se ocupă de cercetări în logică deviza trebuie să fie: *să studiem temeinic logica matematică înainte de a face cercetări în LOGICĂ*!

Anexă

LOGICA GENERALĂ

Logica generală este o *teorie a formelor gîndirii așa cum ea se realizează cu ajutorul limbilor naturale*.

Cel care a pus bazele logicii generale este filozoful grec Aristotel. Opera lui Aristotel *Organon* cuprinde aproape

---

[1] Acad. Ath. Joja, *Studii de logică*, Editura Academiei R.P.R., București 1960, p. 54.

întreaga logică deductivă care e tratată în logica generală în momentul de față.

Meritul înaintașilor lui Aristotel, fără să fie neglijabil, este totuși infim față de al acestuia.

E de subliniat în special problematica pusă de aceștia în legătură cu identitatea (Parmenide), contradicția (Zenon), conceptul și definiția (Socrate), judecata (Platon), corectitudinea gîndirii (sofiștii).

Aristotel a răspuns la majoritatea acestor probleme și a deschis o mulțime altele care nici astăzi n-au fost în întregime soluționate.

După Aristotel unele contribuții la dezvoltarea acestei logici au adus Teofrast, stoicii (care deschid și perspectiva logicii matematice), scolasticii, Fr. Bacon, J. S. Mill. Bacon și Mill sînt creatorii logicii inductive.

Logica generală cuprinde trei capitole mari: logica conceptului, logica judecății și logica raționamentului.

I. *Logica conceptului (noțiunii)*

Actul elementar de gîndire este judecata, iar judecata este o *aserțiune* despre obiecte, aserțiune care se realizează în formă de propoziții.

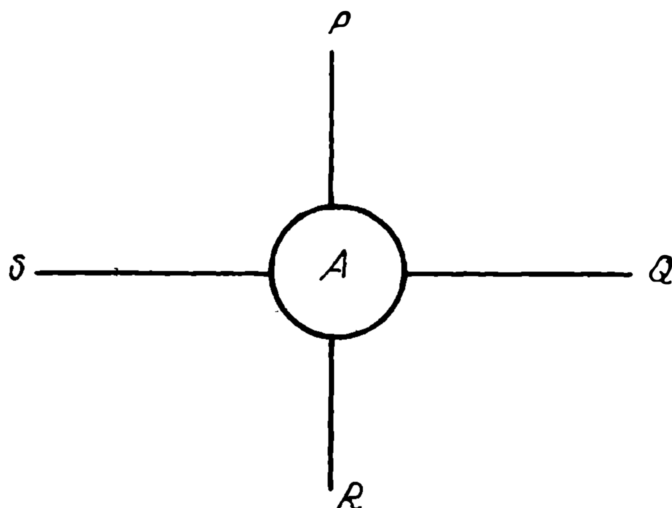
În conștiința obișnuită judecățile sînt în același timp forma elementară în care se cristalizează „cunoștințele" noastre despre obiecte.

Spun că știu ceva despre obiect dacă pot forma un șir de judecăți adevărate despre el.

Totalitatea cunoștințelor noastre despre un obiect, cunoștințe date sub formă de judecăți (cel mai adesea supuse ele înseși unei anumite ordini), formează ceea ce numim „conceptul obiectului" sau „noțiunea"

În mod obișnuit folosim, pentru a vorbi despre concepte, cuvinte separate sau grupe de cuvinte. Ex., „om", „animal", „democrație", „omenire", „autorul romanului *Ion*", ș.a. Aceste cuvinte sînt de fapt *nume* pentru lucruri și, în același timp, un mod prescurtat de-a fixa totalitatea cunoștințelor noastre despre obiect.

Dacă ar fi să reprezentăm sistemul de cuvinte care fixează cunoştinţele noastre despre un obiect, atunci această reprezentare ar putea avea forma:



unde A este cuvîntul care desemnează obiectul, iar P, Q, R, S, ... sînt cuvinte care desemnează alte lucruri, aspecte, proprietăţi etc. cu care lucrul e pus în relaţii.

Probleme ale noţiunii.

1. *Noţiunea şi obiectul.*

Obiectul este o unitate de *determinări* (însuşiri, părţi, raporturi).

Noţiunea este reflectarea în creier a determinărilor obiectului cu ajutorul cuvintelor. Obiectul este tot despre ceea ce putem vorbi cu sens, adică lucruri materiale, proprietăţi ale lucrurilor, situaţii, evenimente, procese, idei, sentimente etc. Obiectul este prim, iar noţiunea este secundă. Noţiunile nu epuizează prin reflectare mulţimea determinărilor obiectelor. *Dezvoltarea noţiunilor înseamnă apropierea din ce în ce mai mare de obiect (reflectarea tot mai completă a obiectului).*

Ştiinţa care se ocupă cu dezvoltarea noţiunilor este o ramură a *Dialecticii*, ramură care poartă numele de *Logică*

dialectică. Logica formală nu se interesează de problema dezvoltării noțiunilor, ci doar de raporturile dintre ele, întrucît aceste raporturi sînt necesare pentru formarea de judecăți și raționamente corecte.

În ce privește obiectul, el interesează logica formală numai în măsura în care pune anumite probleme pentru studiul raporturilor dintre noțiuni.

2. *Noțiunea și cuvîntul.*

Cînd vorbim de raportul dintre noțiune și cuvînt ne referim la cuvîntul central care desemnează „obiectul" despre care vorbim. În cazul reprezentării noastre, numai cuvîntul A satisface această condiție.

Să convenim a numi asemenea cuvinte — ***numele obiectului***.

Evident, pentru una și aceeași noțiune putem avea mai multe nume ale obiectului, fie că e vorba de aceeași limbă, fie că e vorba de limbi diferite.

Ex., pentru ființa *om* putem folosi mai multe nume: „om", „*homme*", „*Mensch*", „*man*" ș.a.

Ele sînt identice atît în ce privește obiectul, cît și în ce privește conceptul obiectului, ceea ce putem scrie astfel: om $\equiv$ ***homme*** $\equiv$ ***Mensch*** $\equiv$ ***man*** $\equiv$ seria putînd fi mărită la infinit.

Un cuvînt este o unitate între o formă materială (un șir de sunete sau un șir de desene) și un înțeles (sens), înțeles care poate fi redat printr-un șir întreg de definiții sau pur și simplu judecăți care descriu obiectul la care se referă cuvîntul.

Altfel spus, ***un cuvînt este o unitate dintre o formă materială și un concept***. Forma materială este în raport cu obiectul și deci în raport cu conceptul obiectului arbitrară.

3. *Conținutul și sfera noțiunii.*

Determinările obiectului reflectate în creier se numesc în logică NOTE.

Ex., obiectul pahar are determinările: bun de băut, construit dintr-un material solid etc.

După cum spunem că obiectul are determinări, vom spune corespunzător că noțiunea (conceptul) are *note*.

Totalitatea notelor unei noțiuni formează *conținutul* ei.

Astfel, conținutul noțiunii „om" este format din notele: rațional, constructor de unelte, biman, biped, sociabil, politic ș.a. Totalitatea obiectelor la care raportăm conținutul

(notele) noţiunii formează *sfera* ei. Ex., sfera noţiunii „om" este formată din totalitatea oamenilor care locuiesc planeta noastră.

Pentru a dezvălui sfera noţiunii trebuie să apelăm la alte determinări ale obiectului, determinări care la rîndul lor intră într-o categorie sau alta. Sfera noţiunii „om" o putem dezvălui folosind, de exemplu, criteriul geografic: african, european, asiatic etc.

4. *Clasificarea noţiunilor.*

Noţiunile pot fi clasificate după diferite criterii ca: raportul noţiunii cu obiectul, gradul de generalitate (mărirea sferei), raporturile de sferă, raporturile de conţinut dintre noţiuni, natura obiectului reflectat ş.a.

a) *Raportul noţiunii cu obiectul.* Unui nume dat poate să-i corespundă un obiect sau nu. De ex., numelui „om" îi corespunde o fiinţă reală *om*; dimpotrivă, numelui „înger" nu-i corespunde nici un obiect. Conceptul corespunzător numelor care desemnează un obiect este un concept *real*, iar conceptul corespunzător numelui care doar pare să desemneze un obiect este un concept *vid* sau „pseudoconcept". Conceptele vide apar ca rezultat al unirii accidentale şi artificiale a unor note aparţinînd unor obiecte diferite.

Asemenea concepte *vide* sînt toate conceptele religioase şi imaginare.

b) *Gradul de generalitate.* Din acest punct de vedere avem *noţiuni singulare*, adică acele noţiuni ale căror nume desemnează indivizi (lucruri singulare, *colecţii* de lucruri singulare) şi *noţiuni generale,* adică noţiuni a căror sferă cuprinde mai multe obiecte. Ex., noţiunile „Liviu Rebreanu", „autorul romanului *Nicoară Potcoavă*", „Eforie" ş.a. sînt individuale, iar noţiunile „om", „animal", „oraş", „masă" ş.a. sînt generale.

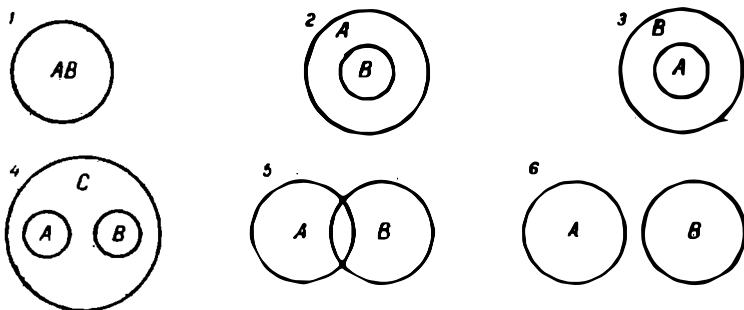
Deosebirea dintre *noţiunile generale* şi *noţiunile colective* este următoarea: tot ce este adevărat despre obiecte în general este adevărat şi despre fiecare caz individual în parte; dimpotrivă, nu tot ce este adevărat despre colecţie este adevărat şi despre obiectele din care constă colecţia. Deoarece despre „om" în general putem spune că este raţional, putem spune şi despre fiecare om în parte. Dimpotrivă, despre o bibliotecă putem spune că ea *are 1 000 de cărţi*, fără ca acest lucru să mai poată fi spus şi despre fiecare carte a bibliotecii.

De obicei sînt introduse printre noţiunile generale ca nişte cazuri-limită aşa-numitele *categorii logice*. Categorii logice sînt: materie, spirit, spaţiu, timp, formă, conţinut etc.

c) *Raporturi de sferă dintre noţiuni*. Două noţiuni date A şi B se pot afla în următoarele raporturi de sferă:

1) $A \equiv B$ (raport de identitate)
2) $A > B$ (supraordonare)
3) $A < B$ (subordonare)
4) $A \diamondsuit B$ (cosubordonare)
(2)–(4): raporturi de ordonare
5) $A \times B$ (încrucişare)
6) $A + B$ (excludere).

Raporturile 1) — 6) pot avea următoarele reprezentări geometrice (datorate lui Euler):



Ex. 1) „animal raţional" şi „animal constructor de unelte",

2) „vertebrat" şi „mamifer",

3) „handbalist" şi „sportiv",

4) „fotbalist" şi „voleibalist" faţă de „sportiv",

5) „sportiv" şi „muncitor" (nu tot ce-i sportiv este şi muncitor şi, invers, nu tot ce-i muncitor este şi sportiv),

6) „organic" şi „anorganic"

Raporturile de tipul 2) — 3) sînt foarte mult folosite în ştiinţe ca Biologia şi poartă nume de „raportul dintre gen-specie" (fără ca termenii de „gen" şi „specie" să aibă aci, în Logică, semnificaţia restrînsă din Biologie).

Între două noţiuni A şi B aflate în raport de ordonare funcţionează următoarea lege: dacă sfera noţiunii A este mai largă decît sfera noţiunii B ($A > B$), atunci ea este mai săracă în conţinut decît noţiunea B; dacă sfera noţiunii A este mai îngustă decît sfera noţiunii B ($A < B$), atunci conţinutul ei este mai bogat decît conţinutul lui B. Această lege poartă numele de legea *raportului invers*.

d) *Raporturile de conţinut dintre noţiuni.*

Noţiunile pot să se afle în domenii determinate comune şi atunci vom spune că sînt „de acelaşi ordin" sau „comparabile".

Aşa sînt noţiunile „pasăre" şi „mamifer", „oraş" şi „capitală" ş.a.

Evident că printre noţiunile comparabile vom avea în vedere pe acelea care au cel puţin o diferenţă accidentală între ele, deoarece îşi pierde sensul să spunem că există două noţiuni comparabile şi identice în acelaşi timp.

Diferenţa de conţinut dintre noţiuni poate merge crescendo. Vom avea:

— noţiuni simplu diferenţiate (ex., „triunghi" şi „pătrat");

— noţiuni contrarii; una se caracterizează exact prin note opuse celeilalte (ex., „alb" şi „negru", „cald" şi „frig");

— noţiuni opuse-exclusiv; una se caracterizează prin absenţa notelor celeilalte („om" şi „non-om");

— noţiuni necomparabile („triunghi" şi „pace", „roşu" şi „suprafaţă").

Noţiunile necomparabile pot fi tratate ca un caz-*limită* al noţiunilor comparabile.

e) *Natura obiectului reflectat.*

Numele se poate referi la obiecte luate ca un tot organic, la aspecte separate ale obiectelor sau la relaţii.

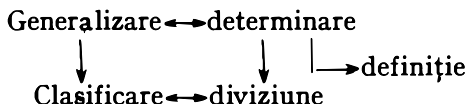
Dacă numele desemnează obiectul ca întreg atunci vom avea noţiuni corespunzătoare „concrete" Dacă numele desemnează aspecte, raporturi ale obiectelor, atunci vom avea noţiuni „abstracte".

Astfel, „om", „copac", „popor" sînt noţiuni concrete, iar „umanitate", „albeaţă", „coloratură", „a fi mai mare" sînt noţiuni abstracte.

5. *Operații asupra noțiunilor.*

Avînd un șir de noțiuni *A*, *B*, *C*, ... noi putem să facem în legătură cu ele un șir de operații: să le generalizăm sau determinăm, să le clasificăm sau divizăm, în fine să le definim.

Schema raportului dintre aceste operații este următoarea:



Operațiile de generalizare și determinare sînt operații fundamentale, iar restul sînt derivate.

Operația *formală* de generalizare (trecere de la o noțiune la alta) trebuie deosebită de operația de *desprindere a însușirilor generale plecînd de la anumite cazuri particulare* (generalizarea inductivă). Operația de generalizare formală presupune că ambele noțiuni sînt date (formate). Dimpotrivă, operația de *generalizare inductivă* conduce la formarea (sau cel puțin dezvoltarea) noțiunii.

a. *Generalizarea și determinarea.*

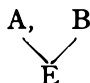
Operația de trecere de la o noțiune *A* la o noțiune *B* ($A < B$) prin eliminarea de note proprii lui *A* poartă numele de *generalizare.*

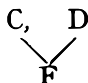
Exemplu. Trecerea de la noțiunea „pătrat" la noțiunea „patrulater" prin eliminarea notelor: „a avea toate laturile egale", „a avea toate unghiurile drepte" și „a avea laturile paralele două cîte două" constituie o generalizare.

Operația de trecere de la o noțiune *A* la o noțiune *C* ($A > C$) prin adăogarea unor note ce nu aparțin tuturor obiectelor din sfera lui *A* poartă numele de *determinare.* Astfel, trecerea de la noțiunea „romb" la noțiunea „pătrat" prin adăogarea notei: „a avea toate unghiurile drepte" constituie o determinare.

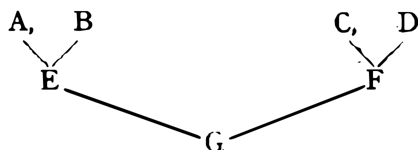
b. *Clasificarea și diviziunea.*

Fiind date un șir de noțiuni *A*, *B*, *C*, *D*, ... noi determinăm căror anume noțiuni pot fi ele cosubordonate.



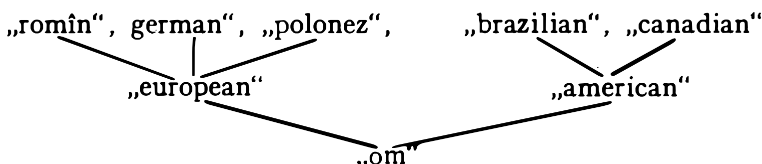


Spunem că *E* și *F* sînt două clase de obiecte, iar trecerea de la *A*, *B* la *E* și de la *C*, *D* la *F* se numește *clasificare.* Evident, clasificarea poate fi continuată astfel:

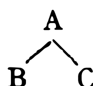


Clasificarea se bizuie pe operația de *generalizare*, fiind de fapt un caz particular al generalizării.

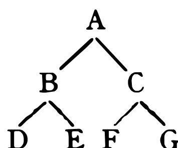
Iată un caz:



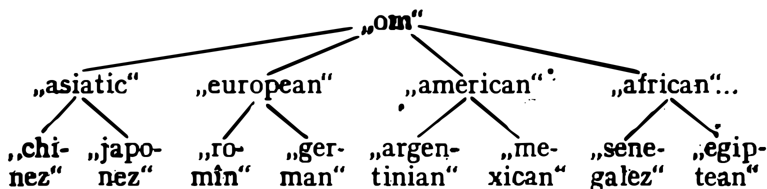
Diviziunea este operația inversă clasificării (deci un caz particular al determinării), prin care se trece de la noțiunea *A* la un șir de noțiuni cosubordonate, *B*, *C*,



Diviziunea poate fi continuată



Exemplu de diviziune:



Diviziunii i se impun o serie de condiţii:

1) să avem un criteriu bine determinat (ex. cel geografic-politic),

2) membrii diviziunii (*B*, *C*) să se excludă reciproc,

3) diviziunea să fie continuă (să se facă din aproape în aproape):



4) Sfera noţiunii divizate să fie egală cu suma sferelor membrilor.

Diviziunea şi clasificarea sînt operaţii foarte importante în ştiinţele descriptive.

c. *Definiţia*. Numim definiţie (sau definire) operaţia prin care delimităm o noţiune *B* faţă de alte noţiuni care fac parte dintr-un domeniu comun *A*. Structura definiţiei poate fi redată astfel:

$$B \underset{\text{df}}{=} AC,$$

unde B este noţiunea de definit *(definiendum)*, $\underset{\text{df}}{=}$ semnul care se citeşte: „se defineşte prin", *A* — noţiunea supraordonată lui *B* ,denumită şi „gen proxim", *C* — noţiunea caracteristică („diferenţa specifică") a lui *B*.

Există mai multe feluri de definiţii:

— nominale (definesc sensul termenilor),

— reale (definesc esenţa noţiunii).

Ex., definiţia: «logos» înseamnă *ordine* este o definiţie nominală, „omul este un animal raţional" este o definiţie reală.

Definiţiile reale sînt la rîndul lor de mai multe feluri:

— generice (folosesc raportul gen-specie),

— genetice (indică originea obiectului),

— structurale (indică sistemul de relaţii în care se află obiectul),

— definiţii recursive (Ex. definiţia formulei în calculul predicatelor).

Definiţia: „omul este un animal constructor de unelte" este generică; definiţia: „conul este figura geometrică ce ia naştere prin rotirea unui triunghi în jurul înălţimii sale"

este genetică, iar definiţia: „zero este acel număr a pentru care este adevărat că

$$ax = a$$

$$a + x = a$$"

este o definiţie structurală.

Regulile definiţiilor.

1) Sfera definitului *(definiendum)* să fie identică cu sfera definitorului *(definiens)*.

2) Definiţia nu trebuie să cuprindă un cerc vicios (definitorul nu trebuie să se definească prin definit).

3) Definiţia trebuie să fie dată în termeni precişi.

4) Definiţia trebuie să fie dată, dacă e posibil, numai în termeni pozitivi.

II. *Judecata*

Judecata este o afirmaţie sau o negaţie despre anumite lucruri.

Ex.: „Astăzi plouă", „$2^2 = 4$", „Liviu Rebreanu este autorul romanului *Ion*" sînt judecăţi.

Faţă de noţiuni, judecăţile sînt legături între noţiuni.

Orice judecată este compusă din termeni (anumite noţiuni) şi o relaţie între termeni.

a. *Clasificarea judecăţilor.*

Judecăţile se clasifică după: 1) natura relaţiei reflectate; 2) calitate; 3) cantitate; 4) tipul relaţiei dintre termeni; 5) modalitatea relaţiei.

1) În mod obiectiv avem obiecte, proprietăţi şi raporturi.

Judecăţile în care se reflectă raportul dintre obiect şi proprietăţile sale (deci intraraporturile) se numesc judecăţi „de predicaţie" Astfel sînt: „mamiferele sînt animale care nasc pui vii", „triunghiul este o figură geometrică cu trei laturi şi trei unghiuri" ş.a.

Judecăţile în care se reflectă raporturile unui obiect cu un alt obiect (interraporturile) se numesc judecăţi „de relaţie".

Ex.: „Bucureştiul este la sud de Ploieşti", „$4>2$", „$2=2$" ş.a. sînt judecăţi de relaţie.

2) Judecățile sînt apoi *afirmative* și *negative* (după calitate).

Judecata „Bucureștiul este capitala Romîniei" este o judecată afirmativă, iar judecata „Brașovul nu este așezat în Bărăgan" este o judecată negativă.

3) După cantitate, judecățile se împart în: singulare („Vasile Conta este filozof"), particulare („Unele numere sînt raționale") și universale („Toate numerele naturale sînt numere întregi").

4) După relația între termeni (tipul de legătură), judecățile se împart în: *categorice* sau necondiționate („Marte este o planetă"), *ipotetice* („Dacă plouă îmi iau umbrela"), *disjunctive* („Apa este sau în stare lichidă sau în stare solidă sau în stare gazoasă") și *conjunctive* („Tudor Arghezi este poet și prozator").

5) După modul legăturii, judecățile sînt: *nemodale* (asertorice), problematice și apodictice.

Ex.: Judecata „Mihail Eminescu este cel mai mare poet romîn" este asertorică, judecata „*Este posibil* ca mîine să plouă" este problematică, iar judecata „*Este necesar* ca socialismul să învingă capitalismul" este o judecată apodictică.

b. *Studiul diferitelor feluri de judecăți.*

1. *Judecățile de predicație.* Aceste judecăți sînt compuse din „subiect", „predicat" și cópula (legătura subiectului cu predicatul).

Schematic: $S - P$ („subiectul (S) este (—) predicatul (P)").

În judecata „Vasile Conta este un mare filozof romîn", subiectul este „Vasile Conta", predicatul este „un mare filozof romîn" iar cópula însuși verbul „este"

După cît se vede subiectul este noțiunea corespunzătoare obiectului despre care vorbim, iar predicatul este însușirea pe care o atribuim subiectului prin cópulă.

În logica generală judecățile de predicație joacă un rol central.

Deosebit de important este studiul acestor judecăți sub raportul calității și cantității. În cele ce urmează judecățile de predicație vor fi în același timp categorice. Pentru a le reprezenta vom folosi pe lîngă simbolurile S, P, $+$, simbolurile T (toți), U (unii) și $+$ (nu este).

Prin clasificarea lor după criteriul combinat al calității și cantității obținem următoarele tipuri importante de judecăți:

— universal-afirmative (A): $T\ S - P$ (toți S sînt P),

— universal-negative (E): $T\ S + P$ (toți S nu sînt P),
— particular-afirmative (I): $U\ S - P$ (unii S sînt P),
— particular-negative (O): $U\ S + P$ (unii S nu sînt P)

Literele A, E, I, O sînt numele judecăților respective.

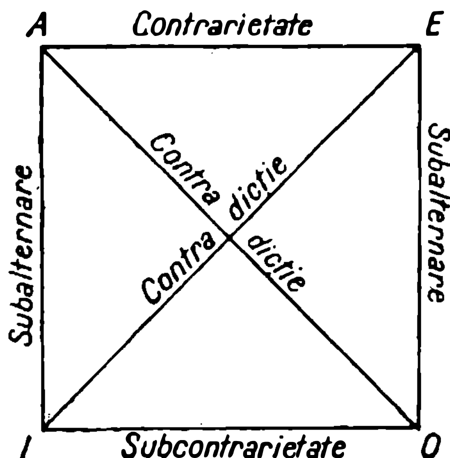
O problemă importantă a judecăților A, E, I, O este aceea a raporturilor dintre ele din punctul de vedere al valorii lor logice.

Între cele 4 judecăți care (convenim) sînt fie adevărate, fie false și care (convenim) au același subiect și același predicat pot exista 4 raporturi determinate:

— raportul de contrarietate între A și E,
— raportul de contradicție între A și O, E și I,
— raportul de subordonare (subalternare) între A și I, E și O,
— raportul de subcontrarietate între I și O.

Aceste raporturi se caracterizează după cum urmează: Judecățile contrarii nu pot fi împreună adevărate; judecățile aflate în raport de contradicție nu pot fi împreună nici adevărate și nici false; judecățile subalterne nu se pot afla în situația astfel ca universala să fie adevărată și particulara falsă; iar judecățile subcontrarii nu pot să fie împreună false. Toate celelalte cazuri, în afara celor indicate mai sus, sînt posibile. De exemplu, judecățile contrarii pot fi împreună false, sau una falsă și alta adevărată etc.

Raporturile dintre judecățile A, E, I, O sînt reprezentate cu ajutorul așa-numitului „pătrat logic“ sau „pătratul lui Boetius“



2. *Distribuirea termenilor în judecățile de predicație.*

Spunem că un termen este distribuit față de celălalt dacă este luat în toată universalitatea sa, cu alte cuvinte dacă este afirmat sau negat în mod universal față de celălalt.

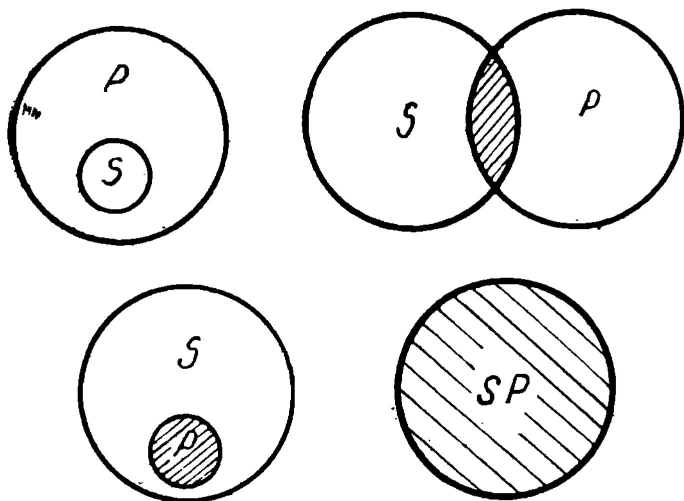
În judecata universal-afirmativă (*A*) subiectul este distribuit, dar predicatul nu. Într-adevăr, numai despre „toți *S*“ se afirmă că sînt *P*, dar nu și invers.

În judecata universal-negativă (*E*) atît subiectul cît și predicatul sînt distribuite. Aceasta deoarece dacă *S* este exclus total din *P*, atunci și *P* se va afla total în afara lui *S*.

În judecata particular-afirmativă (*I*) nici subiectul și nici predicatul nu sînt distribuite, aceasta deoarece noi afirmăm despre „unii *S*“ (și nu despre toți) că sînt *P*, iar *P* nu e obligatoriu să intre complet în „unii *S*“

În judecata particular-negativă (*O*), numai predicatul este distribuit, deoarece „unii *S*“ sînt excluși din întreaga sferă a lui *P*. Distribuirea termenilor poate fi cercetată și inductiv, pornind de la raporturile posibile dintre noțiuni care stau la baza unei judecăți.

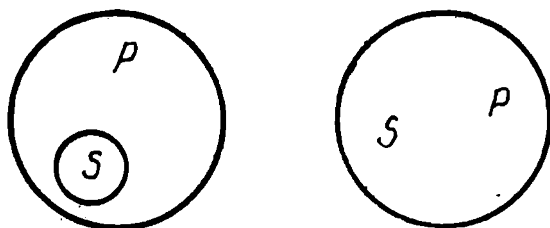
De exemplu, judecata *I* poate avea la bază unul din raporturile următoare:



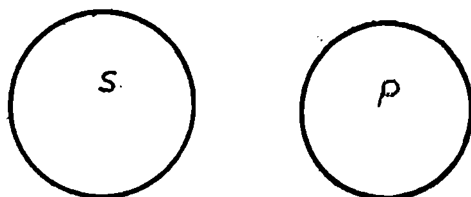
Orice afirmație despre judecată pentru a fi valabilă trebuie să cuprindă *toate* cazurile ei particulare (în cazul de față 4).

Dacă un singur caz infirmă proprietatea (raportul) cercetată, ea nu mai este universal-valabilă. În situația de mai sus, cazul 2 arată că nici subiectul și nici predicatul nu intră unul complet în sfera celuilalt. Această constatare este de ajuns pentru a spune că în judecata I nici subiectul și nici predicatul nu sînt distribuite.

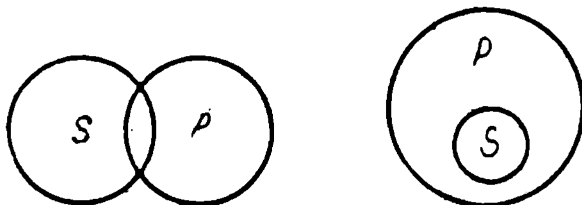
Pentru rezolvarea anumitor raporturi între judecăți este util să folosim reprezentarea geometrică a fiecărui tip de judecată categorică de predicație în parte. Între termenii unei judecăți categorice de predicație pot exista diferite raporturi de sferă. Să considerăm, de exemplu, judecata *A*: *T S — P*. În această judecată termenii pot să se afle în următoarele două raporturi (în presupunerea că judecata este adevărată).

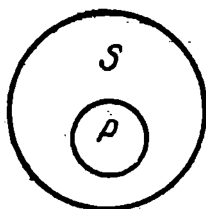


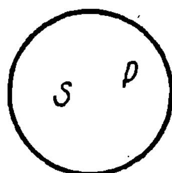
Pentru judecata *E*: *T S + P* poate fi un singur raport:



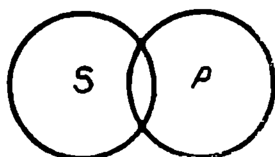
Pentru judecata *I*: *U S — P* pot fi următoarele raporturi:

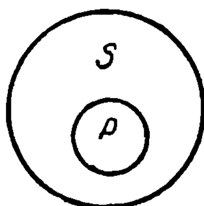


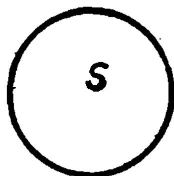


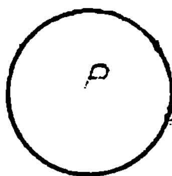


Pentru judecata *O*: *U S + P* pot fi următoarele raporturi:









Problemă. Să se cerceteze raporturile din pătratul logic cu privire la alte judecăți decît *A*, *E*, *I*, *O*. Să se considere de asemenea judecățile cu termeni diferiți. (De ex. $T\ S_1 - P_1$, $T\ S_2 - P_2$.)

3. *Judecățile clasificate după relația între termeni.*

Judecățile simple de predicație, așa cum au fost date mai sus, sînt în același timp judecăți în care *aserțiunea* se face simplu fără vreo condiție.

În judecățile ipotetice (condiționale) aserțiunea se face întotdeauna condiționat.

Forma acestor judecăți este următoarea:

„Dacă *A* atunci *B*", unde *A* este antecedentul, *B* este consecventul, iar „dacă ... atunci ..." este legătura condițională. Judecățile disjunctive indică posibilitatea subiectului de

a avea mai multe predicate. Schematic: $S - P_1$ sau P_2 sau P_3 sau ... sau P_n. Predicatele $P_1, P_2, \quad P_n$ pot să se excludă între ele sau nu.

Judecățile conjunctive asertează mai multe predicate deodată.

Schematic: $S - P_1$ și P_2 și și P_n

Conjuncția, disjuncția și judecățile ipotetice au următoarele proprietăți importante:

a) Legătura disjunctivă „sau" ca și legătura conjunctivă „și" pot fi așezate între predicate, dar și între propoziții (judecăți).

Astfel, schema: $S - P_1$ sau P_2, sau sau P_n poate fi considerată ca un mod prescurtat de a scrie: $S - P_1$ sau $S - P_2$ sau ... sau $S - P_n$, iar schema: $S - P_1$ și P_2 și ... și P_n poate fi considerată ca un mod prescurtat de a scrie $S - P_1$ și $S - P_2$ și și $S - P_n$

b) Legătura „dacă atunci ..." poate fi considerată ca referindu-se la un raport între lucruri sau între propoziții. Ori de cite ori are loc între lucruri ea poate fi transpusă și între propoziții, dar invers nu e valabil. Astfel: „Dacă se face cald atunci mercurul se urcă în termometru" exprimă o legătură între două fenomene, dar ea poate fi interpretată ca o legătură între propozițiile: „se face cald" și „se urcă mercurul în termometru", adică „dacă «se face cald» atunci «se urcă mercurul în termometru»" (ceea ce înseamnă că din constatarea „se face cald" deduc propoziția „mercurul se urcă în termometru").

O judecată ipotetică este de fapt o judecată compusă din alte două judecăți. Dacă vom nota legătura „dacă atunci" cu semnul $\Rightarrow$, atunci putem scrie prescurtat $A \Rightarrow B$ (dacă A atunci B).

4. *Judecățile de modalitate.*

Am văzut că avem două tipuri de modalități: „posibilul" și „necesarul"

O judecată modală constă din două părți: ***modusul*** (partea modală) și ***dictumul*** (partea asertorică), schematic MD.

Prin negarea celor două modalități s-au introdus alte două: „contingentul" (negarea necesarului) și „imposibilul" (negarea posibilului).

În funcție de calitatea modusului și a dictumului, judecățile modale pot fi de patru feluri:

A: $M\ D$

E: $M\ \bar{D}$

I: $\bar{M}\ D$

U: $\bar{M}\ \bar{D}$

Bara de deasupra literei ($\bar{M}$, $\bar{D}$) indică faptul că avem de a face cu o negație. Literele *A*, *E*, *I*, *U* sînt nume date fiecărei modale în parte (a le deosebi de literele *A*, *E*, *I* *O*). În funcție apoi de modusul particular (posibil, necesar etc.) vom obține o nouă clasificare a modalelor.

Convenim să scriem modusurile cu literele lor inițiale în ordinea următoare: *P*, *C*, *I*, *N*. Vom obține astfel 16 propoziții modale, ceea ce se poate reda astfel:

	P	*C*	*I*	*N*
A	x	x	x	x
E	x	x	x	x
I	x	x	x	x
U	x	x	x	x

Exemple. Considerînd modala *A* cu modusurile *P*, *C*, *I*, *N*, vom avea:

1) Este posibil ca *S* să fie *P*.

2) Este contingent ca *S* să fie *P*.

3) Este imposibil ca *S* să fie *P*.

4) Este necesar ca *S* să fie *P*.

Dacă considerăm modala *E* cu modusurile *P*, *C*, *I*, *N*, vom avea:

1) Este posibil ca *S* să nu fie *P*. ș.a.m.d.

N o t ă. Spunem „propoziții" și nu „judecăți" deoarece avem 16 propoziții și nu 16 judecăți.

Unele propoziții modale deși diferite ca formă sînt identice ca sens.

Ex.: „Nu este posibil ca *S* să fie *P*" este identică cu „Este imposibil ca *S* să fie *P*"

O asemenea identitate de sens se numește „echipolență".

Cele 16 propoziții modale sînt echipolente 4 cîte 4.

Grupele de 4 propoziții echipolente poartă următoarele denumiri mnemotehnice: Purpurea, Iliace, Amabimus și

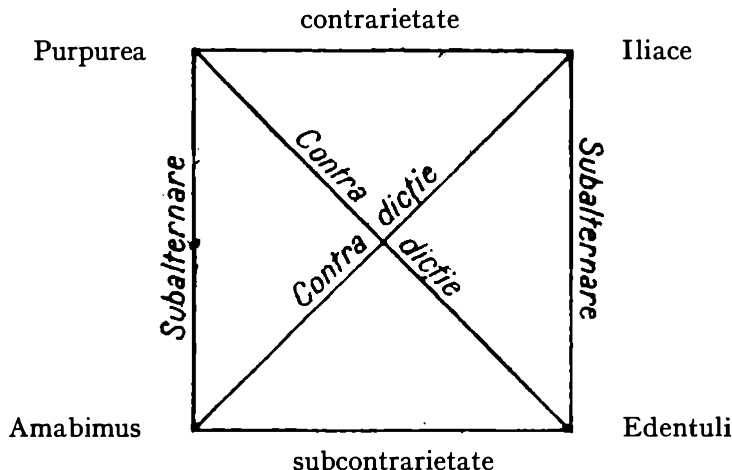
Edentuli*. În aceste cuvinte vocalele desemnează cele 4 modale *A*, *E*, *I*, *U*, iar ordinea vocalelor indică despre ce modus e vorba, avînd în vedere că modusurile sînt luate în ordinea *P*, *C*, *I*, *N*.

```
     U    U       E    A
     |    |       |    |
P   urp   u   r   e    a
     |    |       |    |
     P    C       I    N
```

Cele 4 propoziții modale corespunzătoare sînt într-adevăr echipolente.

1) *Nu este posibil* ca *S* să nu fie *P*.
2) *Nu este contingent* ca *S* să nu fie *P*.
3) *Este imposibil* ca *S* să nu fie *P*.
4) *Este necesar* ca *S* să fie *P*.

În cazul judecăților modale avem de asemenea un pătrat logic care se stabilește prin raport cu cele patru grupe.



Ex., propoziția „Este posibil ca *S* să fie *P*" din Amabimus se află în contradicție cu oricare propoziție din Iliace, de ex.: cu „Nu este posibil ca *S* să fie *P*"

5. *Alte probleme ale judecății.*

a) Judecățile mai pot fi clasificate după cum conțin termeni de valoare sau nu. Astfel avem propoziții prime și propoziții de valoare (secunde).

* Fiecare grupă cuprinde 4 propoziții modale și o singură judecată.

Ex., propoziția „Afară este frig" este o propoziție primă, iar propoziția „Este adevărat că afară este frig" este o propoziție de valoare.

b) Problema negației în judecată.

Negația în judecată poate să-și schimbe locul. Ea poate să cadă pe termeni sau pe relație *.

Ex. $T\ S + P$ poate fi scrisă și astfel:

$$T\ S - \bar{P} \text{ (Toți } S \text{ sînt non-}P).$$

În acest fel, după poziția negației putem avea următoarele forme de judecăți simple de predicație:

$$S - P \quad S - \bar{P} \quad \bar{S} - P \quad \bar{S} - \bar{P}$$

$$S + P \quad S + \bar{P} \quad \bar{S} + P \quad \bar{S} + \bar{P}$$

În general, dacă ținem seama de: *a)* cantitatea judecăților, *b)* calitatea cópulei și *c)* calitatea termenilor obținem un număr de 32 de judecăți.

Aceste judecăți pot fi redate într-un tabel cu trei intrări: a) în partea de deasupra (orizontală) se arată cantitatea judecăților, b) în stînga (verticală) se așază judecățile cu cópulă afirmativă și cu diferitele feluri de termeni posi-

---

* În ce privește termenii negativi se impun unele precizări. În abstract, un termen negativ oarecare, non — X (sau $\bar{X}$) admite trei interpretări intensionale: a) „non — X" înseamnă „absența lui X" (sau „vid de X"),

b) „non — X" înseamnă „ceva diferit de X",

c) „non — X" înseamnă „ceva diferit de X în gen cu X"

Fie schema „$TS - \bar{P}$". În prima interpretare, schema devine: „toți S sînt absență de P" Este discutabil dacă o asemenea expresie are sens. În a doua interpretare, schema devine: „toți S sînt ceva diferit de P", expresie care are sens. A treia interpretare, de asemenea, dă o expresie cu sens.

Considerăm schema „$TS + \bar{P}$" În prima interpretare devine: „nici un S nu este absență de P", expresie care pare (cel puțin) să aibă sens. În a doua interpretare devine: „nici un S nu este ceva diferit de P", expresie care are sens. Interpretarea a treia are de asemenea sens. Această interpretare însă fiind restrictivă poate duce la concluzii false. De ex., dacă judecata „toate scaunele nu sînt ființe vii" este adevărată, judecata „toate scaunele sînt ceva diferit de ființele vii, dar în același gen cu ele" este falsă.

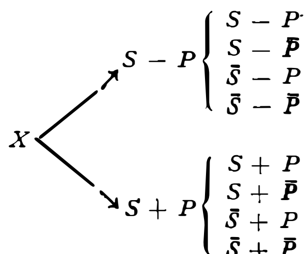
Rezultă că în momentul de față ***pentru a opera cu termenii negativi trebuie să admitem ca indiscutabilă doar interpretarea a doua,*** celelalte urmînd să fie încă supuse discuției.

bili, iar c) în dreapta (verticală) se așază judecățile corespunzătoare cu copulă negativă.

	A	E	I	O	
$S - P$	x	x	x	x	$S + P$
$S - \bar{P}$	x	x	x	x	$S + \bar{P}$
$\bar{S}$ P	x	x	x	x	$\bar{S} + P$
$\bar{S} - \bar{P}$	x	x	x	x	$\bar{S} + \bar{P}$

Fiecare steluță reprezintă două încrucișări, una între *o vocală și o schemă* din dreapta, alta între aceeași vocală și o schemă din stînga.

Schemele pentru fiecare vocală se pot afla foarte ușor cu ajutorul următorului tip de ramificație:



Aci X reprezintă una din cele patru vocale (A, E, I, O).

Logica judecăților cu termeni negativi a fost construită mai tîrziu[1].

c) O altă problemă interesantă a judecăților este aceea a raportului dintre judecățile singulare și universale, precum și singulare și particulare.

O judecată singulară o vom nota astfel: $S_i - P$ (unde „S_i" reprezintă subiectul singular, iar $i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n \ldots$). O judecată universală cu schema $T\ S - P$ poate fi prezentată ca un mod prescurtat de a scrie o conjuncție de judecăți singulare, astfel:

$T\ S - P \equiv S_1 - P$ și $S_2 - P$ și ... și $S_n - P$ (dacă numărul indivizilor este finit) sau $T\ S - P \equiv S_1 - P$ și $S_2 - P$ și $S_n - P$ și ... (dacă seria indivizilor nu e finită).

Exemplu. Judecata: „toți oamenii sînt muritori" este un mod condensat de a scrie judecata: „Omul x_1 este muritor

[1] Vezi Fl. Țuțugan, *Silogistica judecăților de predicație.*

și x_2 este muritor și x_3 este muritor și ... și x_n este muritor" (unde x_1, ... x_n sînt numele proprii ale indivizilor).

Judecata $U\ S - P$ este un mod condensat de a scrie o disjuncție de judecăți particulare, astfel:

$U\ S - P \equiv S_1 - P$ sau $S_2 - P$ sau sau $S_n - P$ (dacă seria indivizilor e finită) sau
$U\ S - P \equiv S_1 - P$ sau $S_2 - P$ sau sau $S_n - P$ sau ... (dacă seria este infinită).

III. *Principiile gîndirii*

Pentru operarea cu judecăți în logica generală se consideră că sînt fundamentale 5 principii (legi) ale gîndirii: principiul identității, noncontradicției, terțiului exclus, dublei negații și rațiunii suficiente.

1) *Principiul identității*: În același timp și sub același raport orice noțiune este identică cu sine.

2) *Principiul noncontradicției*: Este imposibil ca în același timp și sub același raport o judecată să fie și adevărată și falsă.

3) *Principiul terțiului exclus*: În același timp și sub același raport o judecată sau este adevărată sau nu, a treia posibilitate nu există *(tertium non datur)*.

4) *Dubla negație este echivalentă cu o afirmație* *.

5) *Principiul rațiunii suficiente.* Orice aserțiune trebuie să aibă un temei (o rațiune suficientă). Dacă o judecată B se deduce din A și dacă A este o judecată adevărată, atunci A este „rațiunea suficientă" a lui B.

Expresia care apare în primele trei principii: „în același timp și sub același raport", cuprinde condițiile logice ale valabilității formale a oricărei gîndiri.

Pe lîngă definițiile date mai sus sînt posibile un șir de alte definiții ale legilor logice.

În primul rînd este vorba de așa-numitele corespondente ontologice ale legilor logice.

1. *Principiul ontologic al identității*. În același timp și sub același raport orice lucru este identic cu sine. Acest principiu a fost formulat de Parmenide (ceea ce este este și nu poate să nu fie, ceea ce nu este nu este).

* Acest principiu este foarte important pentru operarea cu termeni negativi.

2. *Principiul ontologic al noncontradicției*. În același timp și sub același raport un lucru nu poate să fie și să nu fie.

3. *Principiul ontologic al terțiului exclus*. În același timp și sub același raport un lucru sau este sau nu este, a treia posibilitate nu există.

4. *Principiul ontologic al «rațiunii suficiente»*.

Orice lucru există în virtutea unui temei.

Principiile logice au la bază tocmai raporturile *ontologice* descrise aci.

În afară de formulările date sînt posibile o serie de formulări logice diferite de cele de mai sus.

Este vorba de formulări intrapropoziționale (intrajudicative) și formulări interpropoziționale (interjudicative).

Formulări intrapropoziționale (folosesc raportul dintre subiect și predicat).

1. În același timp și sub același raport un predicat nu poate să aparțină și să nu aparțină aceluiași subiect (noncontradicția).

2. În același timp și sub același raport un predicat aparține sau nu aparține aceluiași subiect, a treia posibilitate este exclusă (terțiul exclus).

Formulări interpropoziționale (folosesc raporturile dintre propoziții).

1. Două judecăți contrarii nu pot fi împreună adevărate (noncontradicția).

2. Două judecăți contradictorii nu pot fi împreună nici adevărate, nici false (terțiul exclus).

Principiile logicii pot fi formulate simbolic în felul următor:

1. $A \equiv A$ (identitatea).
2. $\overline{A \cdot \bar{A}}$ (noncontradicție).
3. $A \vee \bar{A}$ (terțiul exclus).
4. $\bar{\bar{A}} \equiv A$ (dubla negație).

Aci semnele „·", „V" înseamnă respectiv „și", „sau".

IV. *Raționamentul*.

Raționamentul este o succesiune de judecăți din care unele fiind puse, altele decurg din acestea după anumite

legi. Raţionamentele sînt de două feluri: 1) raţionamente deductive; 2) raţionamente inductive.

1. *Raţionamentele deductive.*

Raţionamentul deductiv a fost studiat în cea mai mare parte de către Aristotel.

Raţionamentul deductiv este acela în care se merge de la unele propoziţii (una eventual) generale la alte propoziţii mai puţin generale (particulare), sau de la unele propoziţii la altele cu acelaşi grad de generalitate.

Din raţionamentele deductive fac parte aşa-numitele „inferenţe imediate" şi silogismele. Inferenţele imediate sînt compuse din două judecăţi dintre care una decurge cu necesitate din cealaltă.

A. *Inferenţele imediate cu judecăţi A, E, I, O.*

Există mai multe tipuri de inferenţe imediate:

a) inferenţe bazate pe raporturile din pătratul logic (inferenţe de valoare),

b) inferenţele bazate pe introducerea sau schimbarea locului negaţiei în judecată (obversiuni),

c) inferenţele bazate pe inversarea raportului dintre subiect şi predicat (conversiuni),

d) inferenţele care constau dintr-o succesivă aplicare a obversiunii şi conversiunii la aceeaşi judecată (contrapoziţia).

a. *Inferenţele bazate pe pătratul logic.*

Avem următoarele inferenţe bazate pe pătratul logic:

$\frac{W(A)}{W(I)}$ * $\quad \frac{W(E)}{W(O)} \quad \frac{F(I)}{F(A)} \quad \frac{F(O)}{F(E)}$

$\frac{W(A)}{F(E)} \quad \frac{W(E)}{F(A)} \quad \frac{W(A)}{F(O)} \quad \frac{W(E)}{F(I)}$

$\frac{W(I)}{F(E)} \quad \frac{W(O)}{F(A)} \quad \frac{F(A)}{W(O)} \quad \frac{F(E)}{W(I)}$

$\frac{F(O)}{W(A)} \quad \frac{F(I)}{W(E)} \quad \frac{F(I)}{W(O)} \quad \frac{F(O)}{W(I)}$

---

* Linia de despărţire dintre cele două judecăţi este linia de deducţie şi înseamnă: „din... se deduce că..." sau pur şi simplu „deci...".

Tot pe baza raporturilor din pătratul logic putem avea inferențe imediate fără specificarea valorii.

Astfel, avem două inferențe bazate pe *subalternare*:

$$\frac{T\,S - P}{U\,S - P} \qquad \frac{T\,S + P}{U\,S + P}$$

b. *Obversiunile.*

Putem construi obversiuni pornind de la oricare din cele 32 de judecăți.

$$\frac{T\,S - P}{T\,S + \bar{P}} \qquad \frac{U\,S - P}{U\,S + \bar{P}}$$

$$\frac{T\,S + P}{T\,S - \bar{P}} \qquad \frac{U\,S + P}{U\,S - \bar{P}}$$

c. *Conversiunile.*

Conversiunile sînt de două feluri: simple și prin accident.

Conversiunea simplă este aceea în care schimbarea locului subiectului cu predicatul nu afectează cantitatea judecății.

Se convertesc simplu judecățile *E* și *I*

$$\frac{T\,S + P}{T\,P + S} \qquad \frac{U\,S - P}{U\,P - S}$$

Conversiunea prin accident schimbă cantitatea judecății.

Se convertește prin accident judecata **A**

$$\frac{T\,S - P}{U\,P - S}$$

Judecata *O* nu se convertește.

d. *Contrapoziția.*

Considerăm judecata *A*

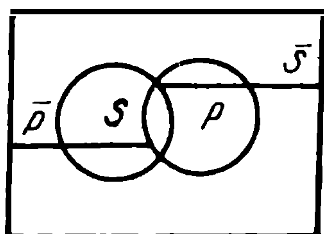
$$\begin{array}{ll} T\,S - P & \\ \hline & \text{(obversiune)} \\ T\,S + \bar{P} & \\ \hline & \text{(conversiune)} \\ T\,\bar{P} + S & \\ \hline & \text{(obversiune)} \\ T\,\bar{P} - \bar{S} & \end{array}$$

În acest fel, din $T\,S - P$ am dedus $T\,\bar{P} - \bar{S}$. Se vede că de fapt contrapoziția este un lanț de inferențe imediate. Contrapoziția este o inferență compusă.

Procedeu de verificare a inferențelor imediate.

Pentru a verifica dacă o judecată este sau nu concluzie imediată din alta, ne putem folosi de reprezentările geometrice ale judecăților. Întrucît avem și termeni negați, este necesar să putem reprezenta și acești termeni.

Reprezentarea se face în felul următor. Se consideră cercurile într-un dreptunghi care poate fi numit „universul discursului". Tot ce e în afara unui cerc în acest dreptunghi constituie domeniul negației termenului aflat în cerc. De exemplu:

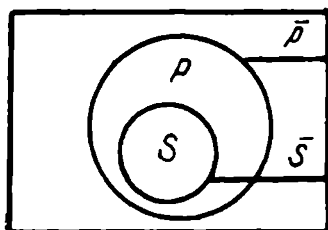


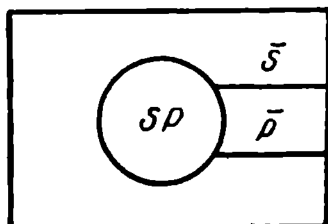
Cum verificăm o concluzie? Reprezentăm judecata respectivă (pentru toate cazurile posibile) și observăm dacă concluzia, la rîndul ei, poate fi reprezentată pe aceleași figuri (respectiv pe fiecare în parte). *Dacă fiecare figură care este o reprezentare a judecății-premisă este în același timp o figură care reprezintă judecata-concluzie, atunci avem realmente o concluzie.*

Ex. Să se verifice obversiunile

$$(1)\ \frac{T\,S - P}{T\,S + \bar{P}} \qquad (2)\ \frac{U\,S - P}{U\,S + \bar{P}}$$

(1). Reprezentăm schema $T\ S - P$. Această schemă are două reprezentări:



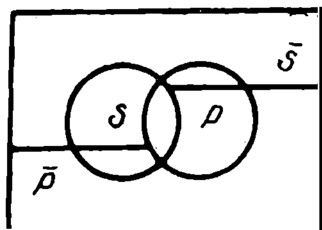


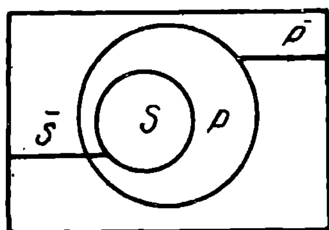
Deoarece a doua reprezentare e mai slabă decît prima, ea poate fi în general omisă, avînd în vedere că tot ce este

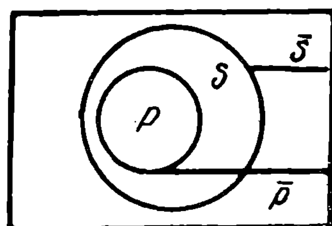
valabil pentru prima reprezentare este valabil și pentru a doua, dar nu și invers.

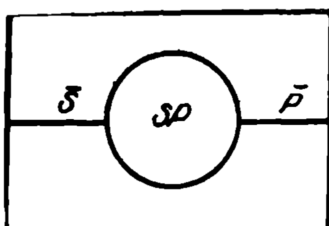
Schema $T\ S + \bar{P}$ (concluzia) poate fi reprezentată de asemenea pe cele două figuri. Într-adevăr, pentru fiecare este adevărat că „tot ce este S se află în afara lui non-P" (altfel spus domeniul lui S și domeniul lui non-P nu se întîlnesc de loc).

(2) Reprezentăm schema $U\ S - P$. Această schemă are 4 reprezentări:









Schema $U\ S + \bar{P}$ poate fi de asemenea reprezentată pe oricare din cele 4 figuri, deoarece în fiecare caz vom găsi o parte din S care se află în afara domeniului lui non-P

De notat este că în cazul în care se dă o schemă cu termeni negativi, va trebui să aplicăm o astfel de inferență care să ne ducă la o schemă cu termeni pozitivi pentru a putea găsi reprezentările.

De exemplu, să se reprezinte schema $T\ \bar{S} - \bar{P}$

Conform cu contrapoziția, obținem:

$$\frac{\dfrac{T\ \bar{S} - \bar{P}}{T\ \bar{\bar{P}} - \bar{\bar{S}}}\ \text{(contrapoziția)}}{T\ P - S}\ \text{(suprimarea dublei negații)}$$

Schema $T\ P - S$ poate fi apoi ușor reprezentată, iar în funcție de ea aflăm și reprezentările schemei inițiale, adică $T\ \bar{S} - \bar{P}$

Problemă. Fiind dată o schemă oarecare, să se afle toate concluziile imediate care decurg din ea.

Indicație. Pentru a afla toate concluziile se aplică succesiv pînă la epuizare toate operațiile de inferență imediată date mai sus.

B. *Inferențe imediate cu altfel de judecăți.*

Judecățile ipotetice. Pentru judecățile ipotetice putem aplica de exemplu contrapoziția:

$$\frac{A \Rightarrow B}{\bar{B} \Rightarrow \bar{A}}$$

Vom vedea însă că asemenea inferență este numai aparent imediată.

Propunem ca exercițiu extinderea inferențelor imediate la altfel de judecăți decît judecățile simple categorice de predicație.

2. *Silogismele (inferențele mediate)*

Numim silogism inferența care pornește de la mai mult de o premisă. Silogismele pot fi clasificate după felul premiselor: silogisme categorice, silogisme ipotetice ş.a.

Silogismele categorice de predicație.

Aceste silogisme sînt formate cu ajutorul judecăților de tipul A, E, I, O. Silogismele categorice de predicație formate cu un minim de judecăți (trei) poartă numele de silogisme „simple"

Structura unui silogism simplu este următoarea:

a) trei judecăți (două premise şi o concluzie),

b) trei termeni (termenii extremi şi termenul mediu).

Ex.:

$$\frac{\begin{array}{c} C - B \\ B - A \end{array}}{A - C}$$

A şi C sînt termenii extremi (ei se unesc în concluzie), B este termenul mediu (el unește termenii extremi şi nu apare în concluzie). Premisa I se numește majoră, iar premisa II se numește minoră.

Deducţia în silogism se bazează pe aşa-numita „axiomă a silogismului": *Dictum de omni et de nullo.* Aceasta înseamnă: „ceea ce se spune despre toţi se spune şi despre fiecare în parte şi ceea ce se neagă despre toţi se neagă şi pentru fiecare în parte".

Există apoi o lege specială pentru termenul mediu (axioma termenului mediu) care arată că termenul mediu trebuie să fie distribuit cel puţin într-o premisă.

La rîndul ei deducţia e subordonată unor legi care decurg din axioma silogismului:

1) termenii extremi nu pot fi luaţi mai generali în concluzie decît în premise,

2) din două propoziţii negative nu poate fi trasă nici o concluzie (cu excepţia cazului în care se face deplasarea negaţiei pe termeni),

3) din două particulare nu se poate trage nici o concluzie,

4) concluzia urmează partea cea mai slabă (partea cea mai slabă fiind premisa particulară, apoi după ea premisa negativă).

Figurile silogismului. Formele silogismelor sînt determinate de poziţia termenului mediu. Termenul mediu poate să ocupe loc de subiect sau de predicat.

Fie să considerăm termenii A, B, C, unde A şi C sînt extremele, iar B este mediul. Convenim ca predicatul concluziei să apară totdeauna în premisa majoră.

Vom avea următoarele figuri:

$B - C$ (α)
$A - B$ (β)
$A - C$ (γ)
Fig. I.

$C - B$ (α)
$A - B$ (β)
$A - C$ (γ)
Fig. II.

$B - C$ (α)
$B - A$ (β)
$A - C$ (γ)
Fig. III.

$C - B$ (α)
$B - A$ (β)
$A - C$ (γ)
Fig. IV

Pe lîngă regulile generale ale silogismului, fiecare figură are regulile ei în parte.

1) Fig. I. Premisa (α) este universală şi premisa (β) este afirmativă.

2) Fig. II. Premisa (α) este universală şi cel puţin o premisă este negativă.

3) Fig. III. Premisa (β) este afirmativă și concluzia (γ) este particulară.

4) Fig. IV Concluzia este particulară sau cel puțin negativă.

Modurile silogismului. Dacă poziția termenului mediu determină anumite figuri ale silogismului, forma judecăților determină anumite moduri în cadrul aceleiași figuri.

Fie de ex. fig. I. Putem avea următoarele moduri:

A	*E*	*A*	*E*
A	*A*	*I*	*I*
A	*E*	*I*	*O*

Exemplu 1):

A: Toate mamiferele sînt vertebrate
A: Toate felinele sînt mamifere

A: Toate felinele sînt vertebrate.

În acest silogism toate judecățile sînt de forma A (universal-afirmative), termenul mediu („mamiferele") este așezat ca în figura I. Termenii extremi sînt, respectiv, „vertebrate" și „feline"

Exemplu 2):

Nici un corp nu este indivizibil în mod absolut
Toți atomii sînt corpuri

Nici un atom nu este indivizibil în mod absolut

Termenul mediu este aci noțiunea „corp"

Exemplu 3):

A: Toate metalele sînt elemente chimice
I: Unele corpuri sînt metale

I: Unele corpuri sînt elemente chimice.

Exemplu 4):

E: Nici un pește nu este mamifer
I: Unele înotătoare sînt pești.

O: Unele înotătoare nu sînt mamifere.

Modurile figurii II sînt: *E A E, A E E, A O O, E I O.*
Modurile figurii III: *A A I, I A I, A I I, E A O, O A O, E I O.*

Modurile figurii IV: *A A I*, *A E E*, *I A I*, *E A O*, *E I O*.

Pentru a reține mai ușor aceste moduri au fost create anumite cuvinte mnemotehnice speciale (autor Petrus Hispanus).

Fig. I. Barbara, Celarent, Darii, Ferio.

Fig. II. Cesares, Camestres, Baroco, Festino.

Fig. III. Darapti, Disamis, Datisi, Felapton, Bocardo, Ferison.

Fig. IV Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison.

Fiecare vocală din aceste cuvinte indică una din judecățile desemnate prin *A*, *E*, *I*, *O*.

(1) *Problemă.* Cîte scheme de deducție avem dacă considerăm orice combinație posibilă de cîte trei judecăți din cele 4 (*A*, *E*, *I*, *O*).

Rezolvare. Pentru a afla combinațiile posibile (nu pur și simplu numărul lor, ci imaginea concretă a fiecăreia), ne folosim de tabelurile de mai jos. Fie *p* (premisa majoră), *q* (premisa minoră) și *r* (concluzie).

p q r	*p q r*	*p q r*	*p q r*
A A A	*E A A*	*I A A*	*O A A*
A A E	*E A E*	*I A E*	*O A E*
A A I	*E A I*	*I A I*	*O A I*
A A O	*E A O*	*I A O*	*O A O*
A E A	*E E A*	*I E A*	*O E A*
A E E	*E E E*	*I E E*	*O E E*
A E I	*E E I*	*I E I*	*O E I*
A E O	*E E O*	*I E O*	*O E O*
A I A	*E I A*	*I I A*	*O I A*
A I E	*E I E*	*I I E*	*O I E*
A I I	*E I I*	*I I I*	*O I I*
A I O	*E I O*	*I I O*	*O I O*
A O A	*E O A*	*I O A*	*O O A*
A O E	*E O E*	*I O E*	*O O E*
A O I	*E O I*	*I O I*	*O O I*
A O O	*E O O*	*I O O*	*O O O*

Avem în total $16 \times 4 = 64$ de scheme posibile pentru fiecare figură. Pentru toate figurile vom avea $64 \times 4 = 256$ de scheme. Evident, nu toate sînt scheme valabile (moduri). Unele dintre acestea vor trebui eliminate. Problema care urmează este deci de a găsi procedee de separație a schemelor valabile (concludente) de cele care nu sînt valabile.

Problema reducerii modurilor.

Modurile silogismului, așa cum a arătat încă Aristotel, pot fi reduse unele la altele, respectiv modurile fig. II, III, IV pot fi reduse la fig. I, cu scopul de a le verifica pe unele prin altele. Există două căi de reducere: reducerea „prin conversiune și schimbarea premiselor" și reducerea „prin absurd"

Reducerea prin conversiune. Pentru a ține minte reducerea de acest tip, cuvintele mnemotehnice de mai sus sînt astfel construite încît consoanele să indice cum trebuie făcută reducerea.

Consoana *s* indică faptul că avem o conversiune simplă a judecății care o precede, *p* — o conversiune prin accident a judecății care o precede, *m* — schimbarea locului premiselor. Consoana inițială *F*, *B*, indică la care mod al fig. I trebuie făcută reducerea (respectiv la acel care începe cu aceeași consoană).

Fie modul Fesapo (fig. IV). Inițiala *F* arată că se reduce la Ferio, consoana *s* arată că premisa I se convertește simplu, iar consoana *p* că premisa a II-a se convertește prin accident.

Schema lui Fesapo e următoarea:

$$\begin{array}{c} T\,C + B \\ T\,B - A \\ \hline U\,A + C \end{array}$$

Efectuăm operațiile indicate de consoane:

$$\begin{array}{c} T\,C + B \\ \hline T\,B + C \end{array} \qquad \begin{array}{c} T\,B - A \\ \hline U\,A - B \end{array}$$

Constituim modul cu noile premise:

$$\begin{array}{c} T\,B + C \\ U\,A - B \\ \hline A\,A + C \end{array}$$

or, acesta este tocmai modul Ferio din fig. I.

Schematic putem prezenta reducerea astfel:

$$\begin{array}{ccc} T\,C + B & \longrightarrow & T\,B + C \\ T\,B - A & \longrightarrow & U\,A - B \\ \hline U\,A + C & \longrightarrow & U\,A + C \end{array}$$

Reducerea prin absurd.

Reducerea prin absurd se efectuează în felul următor:

a) se presupun premisele acceptate,

b) se formează contradictoria concluziei,

c) se substituie contradictoria uneia dintre premise în așa fel ca să obținem termenii așezați ca într-un mod al fig. I,

d) dacă urmează o concluzie opusă uneia din premisele acceptate, atunci ea nu este valabilă.

Reducerea prin absurd are deci rostul de a verifica modurile fig. II, III, IV, prin fig. I.

Să verificăm modul Baroco:

$$\frac{A\ O}{O}$$

Formăm opusa lui O, deci $\bar{O}\ \bar{O} = A$. Substituim pe A lui O, și obținem:

$$\frac{A\ A}{A}\ \text{(Barbara)}$$

Concluzia A contrazice premisa acceptată O, deci nu e valabilă. De aci rezultă că e valabilă opusa ei, adică O. Modul $A\ O\ O$ este un mod verificat. Notăm că modurile Baroco și Bocardo pot fi reduse numai prin absurd.

3. *Silogismele eliptice și polisilogismele.*

Există silogisme la care una dintre judecăți este doar subînțeleasă.

Ex.: „Socrate este muritor deoarece este om". Evident că aci premisa majoră „Toți oamenii sînt muritori" este subînțeleasă.

Un asemenea tip de silogism se numește eliptic.

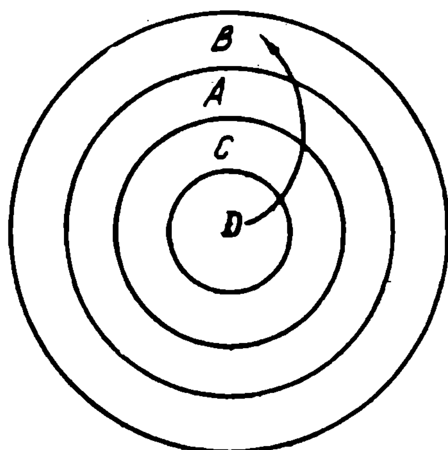
Silogismul simplu eliptic se mai numește și *entimemă.*

Silogismele cu mai mult de trei judecăți se numesc *polisilogisme.*

Există polisilogisme complete (lanțuri de silogisme) și polisilogisme eliptice. Cunoaștem două forme mai importante de polisilogisme complete: *progresiv* și *regresiv.*

În polisilogismul progresiv concluzia unui silogism devine premisă majoră pentru alt silogism.

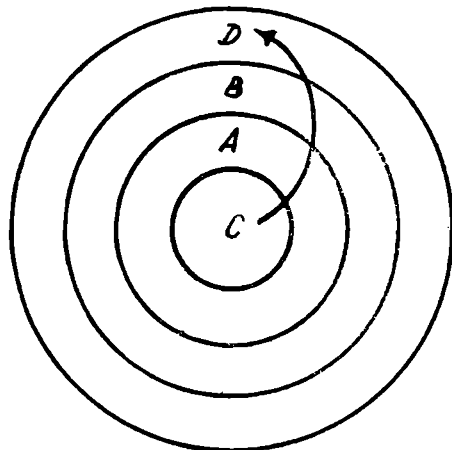
Iată schema și reprezentarea cu ajutorul cercurilor a unui polisilogism progresiv cu judecăți de tipul *A*:



A — B
C — A
――――
C — B
D — C
――――
D — B

În polisilogismul regresiv, concluzia unui silogism devine premisă minoră a silogismului următor.

Iată și schema unui polisilogism regresiv cu judecăți de tipul *A*:



A — B
C — A
――――
C — B
B — D
C — B
――――
C — D

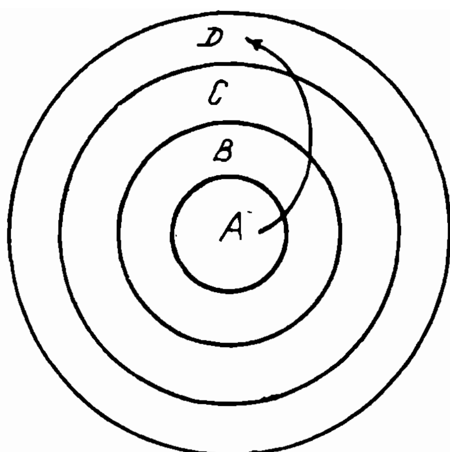
Pentru a găsi exemple de asemenea polisilogisme ar trebui să găsim pur și simplu un șir de noțiuni aflate în raport de ordonare: $D < C < A < B$ (polisilogismul progresiv) și $C < A < B < D$ (polisilogismul regresiv).

În ce privește polisilogismele eliptice, două forme sînt mai importante: soritul și epiherema.

Soritul este de două feluri: *aristotelic* și *goclenian.*

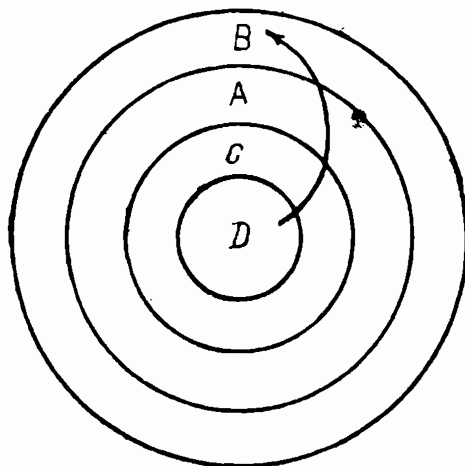
Soritul aristotelic (cu judecăți de tipul *A*)

A — *B*
B — *C*
C — *D*
―――――
A — *D*



Soritul goclenian (cu judecăți de tipul *A*)

A — *B*
C — *A*
D — *C*
―――――
D — *B*



Deoarece polisilogismele arătate mai sus se bazează toate pe raporturile de *ordonare*, le vom numi și „polisilogisme de ordonare“ sau „polisilogisme concentrice“

Soritul este un polisilogism în care este omisă concluzia silogismelor anterioare.

Epiherema este un polisilogism ale cărui premise sînt entimeme.

Iată schema unei *epihereme*:

$$\begin{array}{l} A - B \\ \\ C - D \\ \dots\dots \\ \hline A - E \end{array}$$

4. *Silogismele cu alt fel de premise.*

a) Silogismul ipotetico-categoric.

Silogismele care au ca premisă majoră o judecată ipotetică, iar ca premisă minoră o judecată categorică poartă numele de silogisme ipotetico-categorice.

Există două moduri de asemenea silogisme: *modus ponens* şi *modus tollens* (contrapoziţia).

Modus ponens:

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

Modus tollens:

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \bar{B} \\ \hline \bar{A} \end{array}$$

b) Silogisme de relaţie. Asemenea silogisme sînt, de exemplu, cele bazate pe proprietatea tranzitivităţii.

O relaţie R este tranzitivă dacă pentru ea are loc următoarea schemă:

$$\begin{array}{c} A\,R\,B \\ B\,R\,C \\ \hline A\,R\,C \end{array}$$

Astfel sînt relaţiile $<$ (mai mic), $>$ (mai mare), $\equiv$ (identic), $\subset$ (cuprins, inclus în) ş.a. Iată raţionamentele de tranzitivitate corespunzătoare:

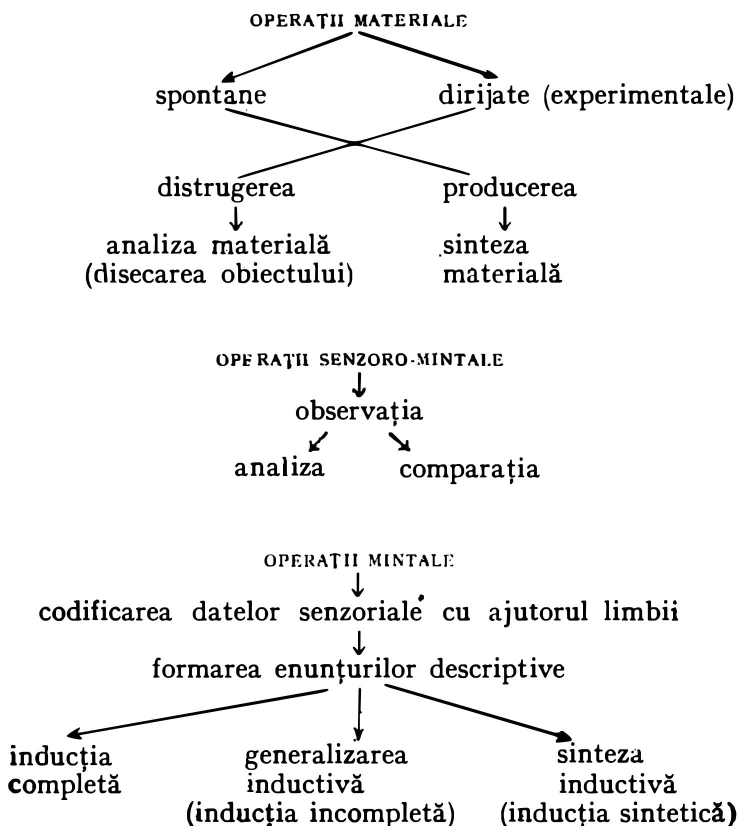
$$\begin{array}{c} A < B \\ B < C \\ \hline A < C \end{array} \qquad \begin{array}{c} A > B \\ B > C \\ \hline A > C \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \equiv B \\ B \equiv C \\ \hline A \equiv C \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \subset B \\ B \subset C \\ \hline A \subset C \end{array}$$

1) Numim procese inductive complexul de operații cu ajutorul cărora obținem o cunoștință generală nouă, pornind de la fapte sau idei mai puțin generale.

Cel mai adesea procesele inductive se desfășoară sprijinite de operații materiale și senzoro-mintale.

Scopul studierii proceselor inductive constă în aflarea operațiilor, descrierea lor, determinarea legilor acestor operații și, în general, în construirea unui model (schemă) general al proceselor inductive.

În cele de mai jos dăm un „model de lucru" (o schemă provizorie) a proceselor inductive și operațiilor care le susțin.



Descriem unele dintre aceste operații.

a. *Analiza materială* constă în descompunerea obiectului în părțile sale componente.

b. *Sinteza materială* constă în recompunerea obiectului din părțile sale componente.

c. *Observația* este perceperea dirijată (orientată) a obiectelor, cu alte cuvinte „trecerea lor în revistă" cu ajutorul simțurilor.

d. *Analiza senzoro-mintală* este observarea pe rînd (distinct) a părților obiectului.

e. *Comparația* este operația prin care observăm o parte a obiectului în raport cu alta, sau un obiect în raport cu altul.

f. *Codificarea datelor senzoriale cu ajutorul limbii* este operația prin care redăm cele observate cu ajutorul limbii. De exemplu, văzînd că lebăda are culoarea neagră formăm propoziția: „am văzut că lebăda are culoarea neagră"

g. *Formarea enunțurilor descriptive* este operația prin care, pe baza celor „observate", trecem la aserțiuni corespunzătoare despre obiect. De exemplu, pe baza enunțului „am văzut că lebăda are culoarea neagră" formăm enunțul descriptiv „lebăda observată are culoarea neagră"

h. *Inducția completă.* În unele cazuri numărul obiectelor (sau al evenimentelor) dintr-o clasă este destul de mic, în așa fel că ele pot fi observate toate într-un timp foarte scurt. În acest caz noi putem forma un număr finit și ușor reprezentabil de enunțuri singulare.

Exemplu, vom avea *n* enunțuri (în funcție de *n* indivizi, obiecte) care pot fi scrise sau pronunțate într-un timp scurt.

Fie aceste enunțuri: $S_1 - P$; $S_2 - P$, $Sn - P$ (unde Si, $i = 1, 2, 3, \dots n$, sînt subiectele propozițiilor singulare). Informația conținută în aceste enunțuri poate fi *condensată* într-un enunț general. Iată schema acestei operații:

$$\frac{S_1 - P \text{ și } S_2 - P \text{ și } S_3 - P \text{ și } \dots \text{ și } S_n - P}{T\,S - P}$$

Această operație de *condensare* poartă numele de „inducție completă"

Problema care se poate discuta aci este dacă între conjuncția propozițiilor singulare și propoziția universală este o diferență de informație sau propoziția universală este pur și simplu un mod prescurtat de a scrie ceea ce spune conjuncția propozițiilor singulare.

i. *Generalizarea inductivă (inducția incompletă).* O operație mai complicată decît inducția completă este generalizarea inductivă. A generaliza inductiv înseamnă a trece de la constatarea a ceva despre *unele* obiecte dintr-o anumită clasă la aserțiunea aceluiași lucru despre *toate* obiectele clasei respective.

La baza generalizării inductive stă următorul principiu: *dacă se constată că o determinare* G *este esențială pentru unele obiecte din clasa* K, *de exemplu obiectele* x_1, x_2, x_3, *atunci noi putem spune că* G *are loc pentru orice obiect* x *din clasa* K.

Faptul că o determinare *G* este esențială pentru un obiect *x* înseamnă că ea este o condiție sine qua non pentru existența obiectului. Toată dificultatea constă în a decide dacă determinarea *G* este sau nu esențială. Deoarece posibilitățile noastre de a rezolva la un moment dat această dificultate sînt limitate, generalizarea duce la concluzii numai cu o anumită probabilitate.

Problema constă deci în a descoperi reguli de inducție care să ne ducă la concluzii adevărate cu o mare probabilitate.

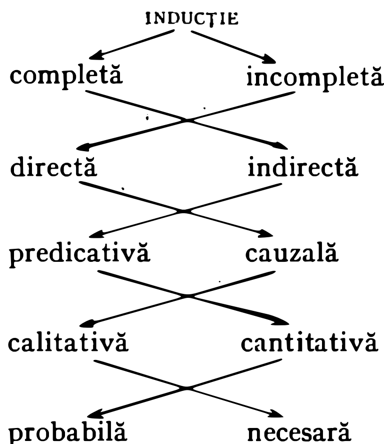
2) *Clasificarea operațiilor inductive.*

În cele de mai sus am studiat în general operațiile care pot să apară în procesul inductiv. Acum vom da o analiză a operațiilor inductive ca atare.

Am studiat deja două feluri de inducție. Acum se pune problema să găsim o clasificare a modurilor inducției. Pentru aceasta putem alege diferite criterii:

a) numărul faptelor individuale,
b) tipul observației (modul de observare a obiectului),
c) tipul relației,
d) tipul obiectului,
e) certitudinea concluziei.

Iată schema clasificării inducției considerînd criteriile în ordinea de mai sus.



Evident că este posibilă o intersecție între aceste *moduri de inducție*.

Nu toate aceste tipuri de inducție au fost bine studiate.

a. Am văzut deja în ce constă inducția completă și incompletă.

b. Inducția după modul observației este directă și indirectă.

Inducția directă are loc atunci cînd obiectul poate fi perceput (observat) direct de noi. De exemplu, inducția în cazul disecției organismelor moarte este o inducție directă. Inducția indirectă are loc atunci cînd obiectele pot fi observate numai indirect prin efectele lor sau cu ajutorul aparatelor.

De acest fel este inducția asupra microobiectelor (în medicină, în chimie, în fizica nucleară), altfel spus „microinducția", inducția asupra obiectelor îndepărtate, de exemplu „inducția cosmică", inducția asupra fenomenelor din trecut („inducția de tip Cuvier", „inducția istorică") inducția cu ajutorul razelor X.

Studiul *inducției indirecte* este foarte important, el punînd, pe lîngă problemele logice propriu-zise, numeroase probleme filozofice.

c. Inducția poate fi apoi clasificată după tipul raportului general obținut. Clasificarea propozițiilor o cunoaștem de la teoria judecății.

De exemplu, putem avea inducţie cu propoziţii de predicaţie (inducţie asupra proprietăţilor), inducţie cu propoziţii cauzale (inducţie asupra raporturilor cauzale).

d. Inducţia poate fi apoi calitativă (raporturi calitative, proprietăţi) şi cantitativă (numerică).

Aci este de menţionat în special aşa-numita „inducţie matematică"

Ce este inducţia matematică?

Inducţia matematică este o inducţie asupra numerelor care se efectuează după următoarea schemă (denumită şi „principiul inducţiei matematice").

Considerăm o însuşire *P* a numerelor naturale. Vrem să arătăm că ea are loc pentru orice număr. Procedăm în felul următor:

Dovedim că:

(1) 0 (zero) are însuşirea *P*,

(2) dacă un număr natural *n* are însuşirea *P*, atunci succesorul său n' ($n' = n + 1$) are de asemenea însuşirea *P*

Din (1) şi (2) decurge

(3) orice număr natural are însuşirea *P*

Schematic:

$$\{[P(o) \text{ şi } P(n)] \Rightarrow P(n')\} \Rightarrow P(x)$$

Această inducţie deşi este incompletă duce la concluzii necesare.

3) *Metodele inductive de descoperire a legăturii cauzale.*

Cercetarea metodelor inductive de descoperire a legăturii cauzale trebuie precedată de un studiu temeinic asupra conceptului de *cauzalitate*. Asupra înţelesului riguros pe care trebuie să-l acordăm termenului de „cauzalitate" nu s-a convenit încă. Astăzi ştim însă că trebuie să acceptăm cel puţin următoarele însuşiri ale raportului de cauzalitate:

a) este o legătură între două fenomene,

b) este o legătură ordonată în timp (de succesiune),

c) primul fenomen (cauza) provoacă existenţa următorului (efectul),

d) dacă *există* fenomenul-cauză *nu poate să nu existe* fenomenul-efect,

e) dacă *nu există* fenomenul-efect nu poate exista nici fenomenul-cauză,

f) dacă *apare* fenomenul-cauză trebuie *să apară* și fenomenul-efect,

g) fenomenul-cauză nu poate fi distrus prin distrugerea fenomenului-efect,

h) fenomenul-efect poate fi distrus prin distrugerea fenomenului-cauză,

i) orice fenomen există în virtutea unei cauze (legea ontologică a „rațiunii suficiente").

Acestea sînt cel puțin o parte din însușirile raportului de cauzalitate („cauzalitate" în înțelesul cel mai obișnuit).

Există apoi două însușiri discutabile — *caracterul univoc* al cauzalității (oricărei cauze îi corespunde un efect și numai unul), sau *caracterul biunivoc* (oricărei cauze îi corespunde un singur efect și oricărui efect îi corespunde o singură cauză). Univocitatea lasă deschisă posibilitatea cauzelor multiple iar biunivocitatea exclude multiplicitatea cauzelor.

Nu intrăm în discuție asupra acestor probleme, afirmăm doar că metodele inductive pe care le vom cerceta presupun *univocitatea* raportului de cauzalitate și cere să lăsăm cel puțin deschisă presupunerea a mai multor cauze.

Cauza și efectul, cel mai adesea (dacă nu chiar întotdeauna), apar însoțite de alte fenomene, fenomene care pot concura la apariția efectului în mod sensibil sau neglijabil. Vom avea deci de cercetat un fenomen *a* care apare într-un grup de împrejurări (situații). Vom numi un asemenea grup de împrejurări care conțin cauza „complex cauzal" Complexul cauzal se poate schimba, ceea ce rămîne constant în el este un singur fenomen, anume *fenomenul-cauză.*

Pentru a descoperi cauza în complexul cauzal al unui fenomen putem să raționăm în mai multe feluri. Aceste moduri de raționare sînt tocmai așa-numitele *metode inductive.* La expunerea lor trecem acum.

1. *Metoda concordanței.*

Regulă: dacă o serie de complexe cauzale ale unui fenomen *a* coincid într-o singură împrejurare (fenomen) *A*, atunci *A* este cauza fenomenului *a*

Schematic:

$$\frac{\begin{array}{l} A\ B\ C\ D - a \\ A\ B\ E\ F - a \\ A\ G\ H\ I - a \end{array}}{A - a}$$

A B C D, A B E F, A G H I sînt trei grupe de fenomene (pot fi evident și mai multe) sau complexe cauzale în care apare *a*. Fenomenul (împrejurarea) comun celor trei grupe este *A*. De aici conchidem că *A* este cauza lui *a*. Fiecare moment al schemei de mai sus poartă numele de „pas inductiv" Schema de mai sus are 4 pași inductivi.

1) $A\ B\ C\ D - a$
2) $A\ B\ E\ F - a$
:

Schema inductivă de mai sus conține în mod intim o schemă deductivă. Această schemă deductivă este următoarea:

Dacă *A* este singura împrejurare comună în complexele cauzale ale lui *a*, atunci *A* este cauza lui *a*.

Or, *A* este singura împrejurare comună în complexele cauzale ale lui *a*.

A este cauza lui *a*.

Este vorba de un raționament ipotetico-categoric *(modus ponens)*.

Premisa majoră a acestui silogism nu este decît regula metodei concordanței.

Premisa minoră este ceea ce se constată conform cu schema inductivă dată, iar concluzia este identică cu concluzia schemei inductive.

Sarcina inducției este de a stabili premisa minoră a silogismului de mai sus, concluzia trăgîndu-se de fapt conform cu acest silogism. Toată dificultatea constă deci în stabilirea premisei minore amintite. Deoarece nu există nici un procedeu care să ne arate cu toată certitudinea că premisa minoră este adevărată, concluzia este doar probabilă.

2. *Metoda diferențelor.*

Regulă: dacă *a* este un fenomen care apare o dată cu un complex de fenomene *X* și dacă *a* fiind absent există un fenomen *A* în complexul de fenomene *X* care este de asemenea absent, atunci *A* este cauza lui *a*

Schematic:

$$\frac{\begin{array}{c} A\ B\ C\ D - a \\ \bar{A}\ B\ C\ D - \bar{a} \end{array}}{A - a}$$

3. *Metoda combinată a concordanțelor și a diferențelor.*

Pentru a mări probabilitatea concluziei este util să aplicăm succesiv metoda concordanțelor și a diferențelor. Dacă cele două metode duc la același rezultat, atunci este foarte probabil că concluzia trasă este adevărată.

4. *Metoda variațiilor cantitative concomitente.*

Regulă: dacă un fenomen *a* variază cantitativ ori de cîte ori variază un alt fenomen *A*, atunci *A* este cauza lui *a*
Schematic:

$$\frac{\begin{matrix} A_1 - a_1 \\ A_2 - a_2 \\ A_3 - a_3 \end{matrix}}{A - a}$$

5. *Metoda rămășițelor.*

Regulă: dacă există un complex cauzal *A B C D* și un complex de efecte *a b c d* și dacă am stabilit o legătură cauzală între *A* și *a*, *B* și *b*, *C* și *c*, atunci conchidem că probabil *D* este cauza lui *d*
Schematic:

$$\frac{\begin{matrix} A\ B\ C\ D - a\ b\ c\ d \\ A - a \\ B - b \\ C - c \end{matrix}}{D - d}$$

4) *Analogia.*

Un alt raționament înrudit cu inducția este analogia. Schema generală a acestui raționament este următoarea:
Comparăm două obiecte *a* și *b*. Dacă *a* are proprietățile *A*, *B*, *C* și *b* are proprietățile *A*, *B*, conchidem că probabil *b* are și proprietatea *C*.

Este important ca proprietățile *A*, *B* și *C* să fie esențiale pentru obiectul *a*, iar proprietățile *A* și *B* să fie esențiale pentru *b*, pentru ca concluzia să fie trasă cu un mare grad de probabilitate.

O formă modernă a analogiei este *raționamentul prin modele*.

Spunem că un sistem S_j este model al sistemului S_i dacă între S_j și S_i putem stabili o corespondență bine definită.

Modelele pot să aibă destinaţii diferite:

a) pot fi modele de studiu,

b) modele pentru reproducerea anumitor operaţii,

c) modele după sisteme imaginate (planuri, scheme geometrice etc.).

Un model de studiu este un sistem S_j pe care reprezentăm un alt sistem S_j cu scopul de a studia pe S_i prin intermediul lui S_j.

De exemplu, harta este modelul teritoriului, schemele logice sînt modele ale formelor gîndirii etc.

„Maşinile inteligente" au ca scop reproducerea operaţiilor (proceselor) intelectuale. Ele sînt (sau conţin) modele de categoria a doua (vezi b).

O construcţie este un model al planului constituit de arhitect. Acesta este un model de categoria a treia (vezi c). La fel, orice maşină este un model al unui plan (proiect). Modelul poate fi înţeles apoi ca *tip* (cazul cel mai reprezentativ al unei clase de indivizi). Astfel stau lucrurile în artă şi psihologie.

Operaţia de constituire a unui model poartă numele de *modelare*.

Gîndirea prin modele este aspectul cel mai general al oricărei gîndiri creatoare. Din acest punct de vedere nu există limită. Pot fi confruntate sisteme care din punctul de vedere al naturii materialului sînt de cea mai diferită natură.

VI. *Ipoteza şi demonstraţia.*

1) *Ipoteza* este o propoziţie care are ca scop explicarea anumitor fapte noi survenite în cercetarea ştiinţifică. Ipoteza nu este încă o propoziţie demonstrată. De exemplu, afirmaţia că „există viaţă pe planeta Marte" este o ipoteză în momentul de faţă.

În legătură cu unele şi aceleaşi fapte putem face mai multe ipoteze.

Pentru ca o propoziţie să fie admisă ca ipoteză se cer unele condiţii:

a) să fie posibilă din punct de vedere logic (necontradictorie),

b) dacă este în acord cu principiile ştiinţei date nu trebuie să contrazică adevărurile care decurg din aceste principii,

c) să fie suficientă pentru explicație.

Ipotezele sînt apoi supuse unei anumite selecții. Vor fi alese acelea care explică cel mai bine faptele.

2) *Demonstrația* este raționamentul care pornește de la premise adevărate. Ea poate fi *directă* (conform cu una din formele deducției) sau *indirectă* (prin absurd).

Raționamentul indirect (prin absurd) constă în următoarele:

a. se cere să se demonstreze o propoziție T,

b. se presupune că este adevărată propoziția $\bar{T}$ (negația lui T),

c. se demonstrează că din $\bar{T}$ decurge o concluzie care contrazice o propoziție adevărată,

d. de aci decurge că nu are loc $\bar{T}$ și că deci are loc T (conform cu legea dublei negații).

3) *Erori în demonstrație.*

În demonstrație sînt posibile o serie de erori. Aceste erori se referă la propoziția de demonstrat, la argumente sau la deducție.

Erorile cu privire la propoziția de demonstrat se reduc, în esență, la substituirea acestei propoziții *(ignoratio elenchi)*. Se poate demonstra o teză mai generală *(qui nimium probat nihil probat)* sau pur și simplu o altă teză care este identificată în mod fals cu propoziția noastră.

Erorile cu privire la argumente pot fi de mai multe feluri:

a) argumentele sînt false *(error fundamentalis)*,

b) argumentele nu sînt concludente (nu au legătură logică cu propoziția de demonstrat),

c) argumentele nu sînt ele înseși demonstrate,

d) argumentele au nevoie de propoziția de demonstrat pentru a fi dovedite (cercul vicios).

Erorile de categoria *b)* sînt printre cele mai răspîndite. Dintre acestea cea mai mare frecvență o au *argumentum ad hominem*, apelul la autoritate și invocarea majorității.

Eroarea *argumentum ad hominem* constă în aceea că, în loc să se discute și să se argumenteze teza, se trece la discuția oamenilor care susțin (sau resping) teza, trăgîndu-se de aci „concluzii" cu privire la adevărul sau falsul propoziției date. Astfel, se invocă defectele intelectuale, morale sau de caracter pentru a se arăta că teza susținută (sau res-

pinsă) nu este adevărată. Scheme de raționare false ca acestea apar extrem de des în viața de toate zilele:

X nu are dreptate deoarece este incapabil,

X nu are dreptate deoarece este încrezut etc.

Asemănătoare cu acestea sînt apelurile la autoritate: este adevărat deoarece a spus X. (Acest mod de a „argumenta" a fost foarte răspîndit în evul mediu).

La fel de neconcludente sînt argumentele care invocă majoritatea. Adevărul și falsul nu pot fi puse la vot.

Schema: X are dreptate deoarece majoritatea este de acord cu el, este o falsă schemă de raționare.

Pe vremea lui Copernic imensa majoritate a omenirii era de acord cu ideea că Soarele se învîrtește în jurul Pămîntului și totuși teza opusă de Copernic s-a dovedit a fi cea adevărată.

În ce privește erorile care privesc deducția, ele constau în diferite forme de încălcare a principiilor și regulilor logice. Una dintre cele mai răspîndite erori de acest fel este așa-numita *împătrire a termenilor (quatermio terminorum)*, care constă din schimbarea sensului termenilor profitînd de omonimie sau de context.

Pentru a reduce procentul erorilor trebuie să cunoaștem logica. Ce-i drept, ea nu este suficientă. Numai în unitate cu experimentul, cu practica, logica poate ajunge la descoperirea adevărului.

TABLA DE MATERII